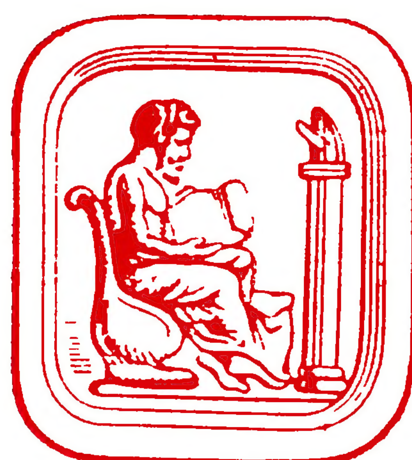
VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



Е. С. ФЕДОРОВ

ПРАВИЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Перевод
А. В. НАРДОВОЙ

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1979

Е. С. ФЕДОРОВ

ПРАВИЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Издание подготовили:

Б. Н. ДЕЛОНЕ, В. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ,
И. И. ШАФРАНОВСКИЙ, К. П. ЯНУЛОВ

при участии

Р. В. ШТОГРИНА и Р. В. ГАЛИУЛИНА

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1979

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком С. И. Вавиловым

Редакционная коллегия:

Б. Н. Делоне, И. Е. Дзялошинский (заместитель председателя), *А. Ю. Ишлинский, П. Л. Капица* (председатель), *С. П. Капица, Б. М. Кедров, И. Л. Кнунянц, А. Н. Колмогоров, С. Р. Микулинский, А. А. Михайлов, Л. С. Полак, Я. А. Смородинский, Р. В. Хохлов, В. А. Энгельгардт, А. Л. Яншин*

Ответственные редакторы:

И. И. Шафрановский, В. А. Франк-Каменецкий

УДК 548.1

Правильное деление плоскости и пространства. Е. С. Федоров. Л., «Наука», 1979, 272 с.

Монография академика Е. С. Федорова (1853—1919) «Правильное деление плоскости и пространства» была издана в 1899 г. на немецком языке и в русском переводе появляется впервые. Она в наиболее полном виде содержит изложение классических исследований гениального русского кристаллографа и геометра в области разбиения плоскости и пространства, которые разрабатывались им в качестве основы теории структуры кристаллов.

Появление в самом конце прошлого века этой монографии Е. С. Федорова признается крупнейшими авторитетами русской и мировой науки как важнейший этап в развитии геометрической теории пространства, в создании учения о параллелоэдрах, как основы строения кристаллов.

Книга сопровождается примечаниями, а также статьями И. И. Шафрановского и В. А. Франк-Каменецкого «Учение о параллелоэдрах и теория правильных систем фигур в творчестве Е. С. Федорова», Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулина и М. И. Штогрина «Современная теория правильных разбиений евклидова пространства», освещающих роль и место учения Е. С. Федорова о разбиении пространства в современной кристаллографии и математике. Завершается она статьей И. И. Шафрановского и В. А. Франк-Каменецкого «Е. С. Федоров и его научное наследие», а также полной библиографией трудов о Е. С. Федорове.

Вместе с двумя вышедшими ранее в этой же серии классическими трудами Е. С. Федорова («Начала учения о фигурах», 1953 г., и «Симметрия и структура кристаллов», 1949 г.) эта книга составит трехтомник избранных трудов Е. С. Федорова по геометрии пространства, симметрии и структуре кристаллов. Рис. — 23, табл. — 7, прил. — 13.

Ф $\frac{20805\text{-}542}{055(02)\text{-}79}$ 917.78. 1904020000.

© Издательство «Наука», 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Публикуемая в настоящем издании монография гениального русского кристаллографа академика Евграфа Степановича Федорова «Правильное деление плоскости и пространства» была первоначально издана в 1899 г., в Германии на немецком языке под названием «Regulare Plan- und Raumteilung» в трудах Баварской Академии наук в ознаменование избрания Е. С. Федорова в 1896 г. членом Баварской Академии.

В этом труде в наиболее полном виде представлены работы Е. С. Федорова в области деления (разбиения) плоскости и пространства, которые были рассмотрены им в «Началах учения о фигурах» (1885 г.), а затем разрабатывались в качестве основы теории структуры кристаллов.

Как известно, основной и руководящей идеей при разработке теории структуры кристаллов у Е. С. Федорова было учение о заполнении кристаллического пространства параллелоэдрами — многогранниками, целиком заполняющими пространство.

Уже после расшифровок первых кристаллических структур в 1916 г. Е. С. Федоров писал[1] по поводу публикуемой монографии: «В „Regulare Plan- und Raumteilung“ впервые выведены все виды кристаллической структуры, изображаемые посредством параллелоэдров, с приведенными на их гранях цифрами, выражающими симметрии связи параллелоэдров; число цифр на грани равно величине симметрии параллелоэдра».

Появление в самом конце прошлого века этой монографии Е. С. Федорова признается крупнейшими авторитетами русской и мировой науки как важный шаг в развитии геометрической теории пространства, в создании теории строения кристаллов.

И действительно, мы можем с полным основанием сказать, что все достижения современной структурной кристаллографии, десятки тысяч расшифрованных кристаллических структур в полной мере согласуются с типами структуры кристаллов, впервые изображенными в этой монографии Е. С. Федорова, которая была опубликована еще в 1899 г., за 13 лет до открытия дифракции рентгеновских лучей на кристаллах.

---

[1] Федоров Е. С. Правильные системы точек и структуры уже исследованных кристаллов. — Тр. Архива АН СССР, вып. 9. Л., 1957, с. 104.

К сожалению, в нашей стране этот труд малоизвестен, причиной тому — отсутствие работы на русском языке (немецкое издание давно стало библиографической редкостью).

В этом томе воспроизводится перевод труда Е. С. Федорова с немецкого издания 1899 г., выполненный А. В. Нардовой при участии В. В. Нардова.

Текст отредактирован и сопровожден примечениями В. А. Франк-Каменецкого, И. И. Шафрановского и К. П. Янулова.

Редакция сочла необходимым сохранить оригинальный текст классического сочинения Е. С. Федорова. В текст внесены лишь самые незначительные изменения. В частности, в таблицах и в тексте добавлены современные обозначения пространственных групп симметрии кристаллов. Все таблицы вынесены в конец первой и второй частей.

В приложениях приведены примечания составителей и статьи И. И. Шафрановского и В. А. Франк-Каменецкого «Учение о параллелоэдрах и теория правильных систем фигур в творчестве Е. С. Федорова» и Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулина и М. И. Штогрина «Современная теория правильных делений евклидова пространства», освещающие роль и место федоровского учения о разбиении пространства и параллелоэдрах в современной кристаллографии и математике.

Книга завершается статьей В. А. Франк-Каменецкого и И. И. Шафрановского «Е. С. Федоров и его научное наследие» и впервые публикуемой полной библиографией трудов о Е. С. Федорове (авторы И. И. Шафрановский и В. А. Франк-Каменецкий), вышедших после его смерти (1919 г.) как в нашей стране, так и за рубежом.

Вместе с двумя опубликованными ранее в серии «Классики науки» изданиями классических трудов Е. С. Федорова («Начала учения о фигурах», 1953 г., и «Симметрия и структура кристаллов», 1949) эта книга составит трехтомник избранных трудов Е. С. Федорова по геометрии пространства, симметрии и структуре кристаллов.

Русский вариант работы Е. С. Федорова выходит в свет в годы расцвета структурных идей в кристаллографии. Среди них немеркнущим факелом светятся блестящие структурные обобщения Е. С. Федорова, и прежде всего его учение о разбиении пространства.

Появление в самом последнем году XIX столетия обобщения Е. С. Федорова по теории деления пространства наряду с его другими работами по геометрической теории структуры кристаллов по праву рассматривается крупнейшими авторитетами советской и мировой науки как переломный момент в развитии кристаллографии.

И действительно, процесс становления кристаллографии как фундаментальной науки о кристаллическом веществе, начатый гением Е. С. Федорова, привел теперь к ее расцвету.

И. И. Шафрановский
В. А. Франк-Каменецкий
К. П. Янулов

Е. С. ФЕДОРОВ

ПРАВИЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Теория кристаллического строения, помимо прочего, выдвинула следующую, чисто геометрическую проблему: [1] *закономерно разделить бесконечное воображаемое пространство на конгруэнтные и соответственно симметрично-равные конечные пространственные фигуры.*

Под *закономерным* делением [2] мы будем понимать здесь такое деление, для которого имеются все операции совмещения. Если мы на поверхности одной пространственной единицы каким-либо образом обозначили бы операции совмещения со смежными единицами, то этим однозначно бы определились законы операций совмещения для единиц всей системы. Но так как решение этой задачи в общем виде связано со значительными геометрическими трудностями, то я позволю себе ради облегчения понимания хода исследования изложить сначала более простую, но совершенно аналогичную задачу правильного деления плоскости в общем виде. Таким образом, эта работа делится на две части.

ЧАСТЬ I

ПРАВИЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

1. Прежде всего перед нами стоит задача — отыскать все типы правильных делений бесконечной плоскости.

В этом отношении мыслимы только два рода таких делений: или а) все фигуры ориентированы параллельно, или б) они не все параллельны.

Системы, которые соответствуют первому допущению, мы будем обозначать как системы I порядка. Исследуем сначала только эти системы.

2. Возьмем любые из таких фигур. Они связаны друг с другом простой трансляцией, которая одновременно является трансляцией совмещения для всех фигур. Для этой трансляции мы получаем определенное направление и определенную величину. Совмещение может быть повторено в данном направлении посредством данной величины любое число раз, и каждый раз вся система совместится сама с собой. Каждая отдельная единица определяет, таким образом, конгруэнтный ряд фигур. Если мы возьмем произвольную точку в одной единице и аналогичные точки во всех других фигурах, то совокупность этих точек образует плоскую сетку (выражаясь аналитически, — квадратичную форму 2-й степени) [3].

3. Но если мы рассмотрим только две смежные (т. е. имеющие общую сторону фигуры), то получим ряд особого рода, в котором каждые две соседние единицы являются смежными. Назовем такие ряды колоннами I порядка.

Таким образом, вся система I порядка может рассматриваться как система смежных параллельных колонн I порядка.

4. Каждая единица может рассматриваться как общая фигура по меньшей мере двух различных колонн I порядка, но различного направления.

Теперь ясно, что любые две колонны, проходящие через данную единицу, однозначно определяют всю систему.

Для ясности рассмотрим две такие колонны. Одну из единиц первой колонны примем за исходную, обозначим ее цифрой 0, смежную с ней в определенном направлении — цифрой 1, следующую — цифрой 2 и так

далее, а в противоположном направлении смежную — цифрой $\bar{1}$, следующую — $\bar{2}$ и так далее. Для единиц II колонны эти цифры поместим на втором месте и обозначим их снова в определенном направлении посредством цифр 1, 2 и так далее, а в противоположном направлении — $\bar{1}$, $\bar{2}$ и т. д.

Теперь ясно, что по принципу координатных осей мы можем точно обозначить любую единицу системы двумя поставленными рядом числами. Два таких числа, как например $m\bar{n}$, означают совершенно определенную единицу системы.

5. Если мы представим себе прямую, идущую в направлении данной колонны через какую-либо точку общей для двух смежных единиц стороны, то эта прямая пересечет все аналогичные стороны единиц колонны в аналогичных точках; эти точки образуют конгруэнтный ряд точек, а расстояние между точками этого ряда является ничем иным, как величиной поступания λ в направлении данной колонны.

Следовательно, плоские единицы систем I порядка отделены друг от друга аналогичными, равными и параллельными сторонами, расстояние между которыми равно λ (где λ означает величину поступания).

Таким образом, число сторон одной единицы может быть только четным.

Такие плоские фигуры мы будем называть параллелогонами.[1]

---

[1] Определение параллелогона было дано в работе «Начала учения о фигурах», § 56 (1), напечатанной на русском языке. Здесь особенно часто будет цитироваться эта работа и два других основных произведения. Эта работа была закончена в 1881 г. и в рукописи показана г-ну Чебышеву (примечание к Предисловию данной работы на с. 19). Но знаменитый математик отказался помочь в публикации этого большого произведения (в печатном виде 227 страниц и 18 больших таблиц) и даже, не взяв рукопись в руки, лишь с чисто принципиальной точки зрения выразил мнение, что в настоящее время такие работы не могут интересовать математиков. Это обстоятельство очень замедлило появление работы в печати; затруднение было устранено только в 1883 г. известным кристаллографом Гадолиным, когда последний из ряда докладов автора ознакомился с его теорией структуры кристаллов. Эта теория нашла подтверждение в ряде положений данного произведения и была доказана экспериментально путем многочисленных специальных наблюдений. Гадолин предложил Санкт-Петербургскому минералогическому обществу, что возьмет на себя заботу о публикации этого произведения (см. переписку Минералогического общества, 1884 г., т. XX, с. 334). В дальнейшем ссылки на эту работу будут обозначаться Н. У. Ф.

Вторым произведением, в некотором отношении также лежащим в основе этой работы, являются «Этюды по аналитической кристаллографии», опубликованные в 1885—1887 гг. в виде четырех отдельных статей. В дальнейшем они коротко будут обозначаться Э. А. К.

Третьим произведением, лежащим в основе этой работы, является учение о симметрии, в котором уже содержится многое из того, что представлено здесь. Это произведение было опубликовано в течение 1889—1891 гг. также в виде четырех отдельных частей. Первая — «Основные формулы аналитической геометрии», где подробно развита особая система координат. В следующих работах было показано, что применение этой системы почти во всех случаях облегчает и упрощает решение задач элементарной аналитической геометрии, в то же время при новой системе координат совершенно исчезает различие в решении в ортогональных и косоугольных координатах, и все основные задачи решаются посредством формул, которые совершенно аналогичны формулам ортогональной системы координат и также просты. Вторая часть вышла

6. Теперь поставим перед собой вопрос, сколько же пар сторон может иметь один параллелогон, или, что то же самое, для скольких колонн он является общей фигурой?

Для данной единицы 0 прилежащими являются фигуры 10, $\bar{1}0$, 01, $0\bar{1}$, которые отделены от начальной особыми сторонами. В смежной колонне прилежащими к 01 являются единицы $\bar{1}1$ и 11; обе эти единицы отделены от единицы 01 двумя аналогичными равными и параллельными сторонами, а расстояние между аналогичными точками этих сторон в направлении колонны опять равно λ.

Таким образом, совершенно невозможно, чтобы кроме 01 одновременно обе единицы $\bar{1}1$ и 11 имели общие стороны с единицей 0, т. е. кроме единицы 01 только одна из двух — или $\bar{1}1$, или 11 — может иметь общую сторону с единицей 0.

Значит, могут существовать параллелогоны только с двумя и тремя парами сторон. Назовем их соответственно *дипараллелогонами* и *трипараллелогонами*.

Давно уже доказано, что стороны можно считать прямыми.[2] Теперь ясно, что параллелогоны, ограниченные линиями другого рода, а не прямыми, можно рассматривать как варианты прямолинейных параллелогонов, в которых ограничивающие их параллельные прямые заменены какими-либо другими более или менее произвольными линиями. Можно придумать бесконечное количество этих вариантов, но они, конечно, не имеют особого значения, и мы можем объединить совокупность всех параллелогонов одного вида в один тип и рассматривать прямолинейные параллелогоны как простейшие для типичных, которые мы назовем *первичными*, в то время как все другие — *вторичные* — могут быть представлены как произведенные от них путем бесконечного количества различных операций.[3]

под названием «Симметрия конечных фигур», третья — «Симметрия бесконечных правильных систем фигур» и четвертая — «Симметрия на плоскости». В дальнейшем эти работы будут приводиться сокращенно У. С., соответственно I, II, III и IV.

Простые параллелогоны описаны в Н. У. Ф., § 57. При этом показано, что кроме двух выпуклых форм имеется еще одна вогнутая форма простого трипараллелогона.

Если плоскость закономерно выполнена формами не одного и того же рода, а m — различными плоскими фигурами, то такие фигуры мы будем называть параллелогонами m-го порядка. Исчерпывающее описание параллелогонов II порядка приведено здесь же, в § 60, и графически изображено в табл. X. Смысл этого описания в том, что фигуры, получающиеся в результате сечения параллелоэдрической системы особыми плоскостями, подробно определенными в § 81 и 82, являются выпуклыми параллелогонами II порядка. Другие плоские фигуры сечений являются параллелогонами высшего порядка.

[2] Подробное описание этой системы приведено в Н. У. Ф., § 57.

[3] Определение и более подробное исследование вторичных систем параллелогонов содержится в Н. У. Ф., § 58. Здесь же показано, что путем построения, служащего для изображения вторичных параллелогонов, можно не только получать криволинейные и другие сложные формы, но также и превращать дипараллелогоны в трипараллелогоны, и наоборот.

Это специальное построение можно видеть на рис. 89.

7. Возможность этих операций существенно ограничена поставленным условием непрерывности. Однако при этом условии невозможно заменить прямые стороны любыми другими, например, такими, которые бы пересекались.

Другое ограничение этих операций заключается в симметрии.

Известно, что достаточно наличия одной оси симметрии 2-го порядка, перпендикулярной к плоскости, чтобы сделать невозможными криволинейные стороны.[4]

8. Симметрия единицы плоскости может быть, однако, много выше. Для того чтобы найти возможные элементы симметрии, нужно принять

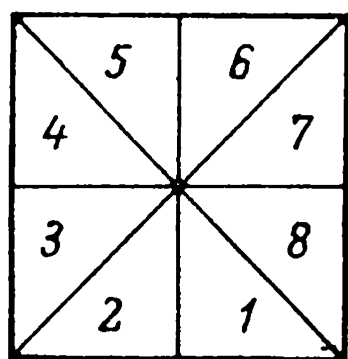


Рис. 1

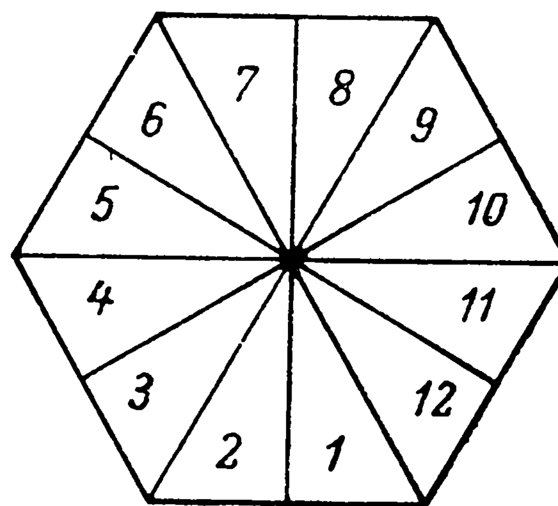


Рис. 2.

во внимание возможные размещения колонн, а также соответственно сторон параллелогонов.

То, что возможны плоскости симметрии, перпендикулярные плоскости, не требует особого доказательства.

Из перпендикулярных к плоскости осей симметрии наивысшей из возможных для дипараллелогона является ось 4-го порядка, а для трипараллелогона — 6-го порядка.

Этим осям симметрии среди прямолинейных параллелогонов, т. е. первичных параллелогонов, соответствуют правильный четырехугольник (квадрат) и правильный шестиугольник.

Наивысшими видами симметрии параллелогонов и, следовательно, систем I порядка вообще являются виды, обусловленные осью симметрии 4-го порядка и четырьмя вертикальными плоскостями симметрии (дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии) или осью симметрии 6-го порядка и шестью вертикальными плоскостями симметрии (дигексагонально-пирамидальный вид симметрии).

Первый вид соответствует квадрату (рис. 1), второй — правильному шестиугольнику (рис. 2).

---

[4] В Н. У. Ф., § 57, это доказано тем, что в определении первичного параллелогона отражено наличие этого элемента симметрии (определение 6) и затем показано, что такие простые формы могут быть только выпуклыми.

Далее само собой следует, что и все другие виды симметрии, являющиеся подчиненными этим двум (их иногда называют подгруппами), также допустимы для рассматриваемых параллелогонов.

9. Вывод всех относящихся сюда видов симметрии является задачей собственно учения о симметрии, и она уже давно полностью решена.[5]

---

[5] Полный вывод видов симметрии на плоскости вообще, и в частности видов симметрии правильного деления плоскости, произведен в У. С. IV, часть I.

При этом показано, что имеется бесконечный ряд геометрических систем симметрии, и в каждой системе содержится четыре различных вида симметрии.

Сперва дается аналитическое выражение посредством уравнений симметрии во вновь введенной прямолинейной системе координатных осей, а затем на основе формул преобразования эти уравнения выражаются в системе полярных координат. Применяется также теория радиус-векторов.

Таким образом был составлен следующий перечень видов симметрии на плоскости.

$2p$-гональная система симметрии

Вид симметрии	Система координат		Аналитическое выражение при помощи векторов
	прямолинейная	полярная	
I (C_{2nv})	$y_0 = b_s^{2p}$, $y_1 = b_s^{2p} + n^k$ или $y_0 = n^l b_s^p$, $y_1 = n^l b_s^p + n^k$	$\rho = r$, $\gamma = n^k g + s \frac{\pi}{p}$	$V = \sqrt[2p]{\sqrt{a' + n^k b' i}} =$ $= n^l \sqrt[p]{\sqrt{a + n^k bi}} =$ $= r \cdot e^i \left(h^k g + s \frac{\pi}{p}\right)$
II (C_{2n})	$y_0 = b_s^{2p}$, $y_1 = b_s^{2p} + 1$ или $y_0 = n^l b_s^p$, $y_1 = n^l b_s^p + 1$	$\rho = r$, $\gamma = g + s \frac{\pi}{p}$	$V = \sqrt[2p]{\sqrt{a' + b' i}} = n^l \sqrt[p]{\sqrt{a + bi}} =$ $= re^i \left(g + s \frac{\pi}{p}\right)$
III (C_{nv})	$y_0 = b_s^p$, $y_1 = b_s^p + n^k$	$\rho = r$, $\gamma = n^k g + s \frac{2\pi}{p}$	$V = \sqrt{\sqrt{a + n^k bi}} =$ $= re^i \left(n^k g + s \frac{2\pi}{p}\right)$
IV (C_n)	$y_0 = b_s^p$, $y_1 = b_s^p + 1$	$\rho = r$, $\gamma = g + s \frac{2\pi}{p}$	$V = \sqrt{\sqrt{a + b \cdot i}} = re^i \left(g + s \frac{2\pi}{p}\right)$

Для систем, в которых p — четное число, остаются лишь два первых вида симметрии. Для системы, в которой $p=1$, т. е. для дигональной (уже недостаточно прямолинейной системы координат), действительны следующие специальные и более простые уравнения симметрии.

Таким образом, здесь мы можем удовлетвориться этими результатами.

Отметив номерами все части, отделенные плоскостями симметрии, мы найдем, что для каждого типа параллелогона любой номер по отношению к какому-нибудь другому выражает определенный элемент симметрии. Если все эти номера мы отнесем к 1, то получим:

для квадрата 2, 4, 6 и 8 выражают вертикальные плоскости симметрии соответствующего определенного положения, 3 и 7 принадлежат вертикальной оси симметрии 4-го порядка и неразрывно связаны, 5 принадлежит вертикальной оси симметрии 2-го порядка, которая подчинена четверной оси, но может также выступать и как самостоятельная ось;

для правильного шестиугольника 2, 4, 6, 8, 10 и 12 также выражают 6 вертикальных плоскостей симметрии совершенно определенного положения, 3 и 11 относятся к оси симметрии 6-го порядка, 5 и 9 — к оси симметрии 3-го порядка; две последние пары осей неотделимы друг от друга, но тройная ось может выступать и самостоятельно, так же как и ось симметрии 2-го порядка, которая здесь выражена номером 7. Если мы учтем предыдущие результаты, то получим следующую таблицу видов симметрии плоской системы.

Дигональная система

Вид симметрии	Система координат		Аналитическое выражение при помощи векторов
	прямолинейная	полярная	
I	$z = n^k c,\ v = n^l d,$	$\rho = r,$ $\gamma = n^k g + s\pi$	$V = \sqrt[2]{\sqrt{a' + n^k b' i}} = n^l (a + n^k bi)$
II	$z = n^k c,\ v = n^k d$	$\rho = r,$ $\gamma = g + s\pi$	$V = \sqrt[2]{\sqrt{a' + b' i}} = n^l (a + b \cdot i)$
III	$z = n^k c,\ v = d$	$\rho = r,$ $\gamma = n^k g + s2\pi$	$V = a + n^k bi$
IV	$z = c,\ v = d$	$\rho = r,$ $\gamma = g + s2\pi$	$V = a + bi$

Уравнения последней строчки указывают, естественно, на полное отсутствие симметрии.

В той же работе приводятся также наиболее общие выражения кривых, относящихся к каждому виду симметрии, и более подробно говорится о простейших рядах. Простейший бесконечный ряд симметричных кривых называется специальным термином «актиноиды». Там же отмечается роль в учении о симметрии функций, названных Коши (Cauchy) «симметричными». Конечно, те же принципы могут совершенно аналогично применяться в вопросе о симметричных пространственных фигурах.

№	Величина симметрии	Характеристические числовые комплексы		Уравнения симметрии	Современные обозначения
		для дипараллелогонов	для трипараллелогонов		
1	1	1	1	$z = c,\ \nu = d$	$C_1 - 1$
2	2	1 5	1 7	$z = n^k c,\ \nu = n^k d$	$C_2 - 2$
3	2	1 2	1 2	$z = n^k c,\ \nu = d$	$C_s - m$
4	4	1 2 5 6	1 2 7 8	$z = n^k c,\ \nu = n^l d$	
5	4	1 3 5 7	—	$y_0 = b_s^4,\ y_1 = b_{s+1}^4$	$C_4 - 4$
6	8	1 2 3 4 5 6 7 8	—	$y_0 = b_s^4,\ y_1 = b_{s+n^k}$	$C_{4v} - 4mm$
7	3	—	1 5 9	$y_0 = b_s^3,\ y_1 = b_{s+1}^3$	$C_3 - 3$
8	6	—	1 2 5 6 9 10	$y_0 = b_s^3,\ y_1 = b_{s+n^k}^3$	$C_{3v} - 3m$
9	6	—	1 3 5 7 9 11	$y_0 = b_s^6,\ y_1 = b_{s+1}^6$	$C_6 - 6$
10	12	—	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	$y_0 = b_s^6,\ y_1 = b_{s+n^k}^6$	$C_{6v} - 6mm$

Здесь приведены алгебраические уравнения всех видов симметрии, так как далеко не все комплексы чисел однозначны для данного вида симметрии. Третий вид симметрии, например, означает наличие одной единственной вертикальной плоскости симметрии. Но она может быть ориентирована различно и в разных случаях выражаться различными числовыми комплексами. Уравнения симметрии, однако, имеют более абстрактную природу, тогда как оси координат могут быть представлены разнообразно.

Значение параметра этих уравнений, так же как и правильное объединение этих десяти видов симметрии в группы, будет объяснено ниже.

10. Для каждого вида симметрии и каждого данного направления общего положения (т. е. прямой, которая не лежит в плоскости симметрии и не перпендикулярна ей) мы получаем число эквивалентных направлений, равное величине симметрии. Для частных направлений имеется меньшее число равных направлений и может быть даже так, что их количество уменьшится до единицы. Такие направления мы назовем единичными.[6]

Указанные выше виды симметрии с этой точки зрения могут быть поделены на следующие группы, которые мы назовем сингониями.

I. Все направления являются единичными. Сюда относятся оба первые вида симметрии.

Эту сингонию мы назовем моноклинной.

II. Имеются только два перпендикулярных друг другу единичных направления, совпадающих со следами плоскостей симметрии на плоскости или с перпендикулярами к ним. Сюда относятся третий и четвертый виды симметрии.

[6] Эти термины были введены в Z. Kristallogr., Bd. XXXI, S. 21 и след.

Эту сингонию мы будем называть р о м б и ч е с к о й.

III. Н е т н и о д н о г о е д и н и ч н о г о н а п р а в л е н и я. Равные или, в особенности, частные направления, если таковые имеются, то в количестве двух. Сюда относятся пятый и шестой виды симметрии.

Эту сингонию мы назовем т е т р а г о н а л ь н о й.

IV. Также нет единичных направлений, но число равных или, в особенности, частных направлений, если таковые имеются вообще, равно 3. Сюда относятся виды симметрии 7-й, 8-й, 9-й и 10-й.

Эту сингонию мы будем называть г е к с а г о н а л ь н о й [4].

За оси координат для уравнений симметрии берутся или единичные (для первых четырех видов симметрии), или частные равные направления, или, наконец (для видов симметрии 5-го, 7-го и 9-го), любые равные направления. Единичные направления мы обозначаем буквами z и v, а равные — y_s, где S — порядковое число, имеющее четыре значения для 5-го и 6-го видов симметрии, три значения для 7-го и 8-го видов симметрии, шесть значений для 9-го и 10-го видов симметрии.

Координаты точки всегда определяются перпендикулярами, опущенными из этой точки на оси координат.

Систему координат для тетрагонального и гексагонального видов симметрии можно, таким образом, назвать специальной; следовательно, между значениями координат должна быть особая зависимость.

Эта зависимость выражается[7]

$$y_s \sin(y_0 y_1) = y_0 \sin(y_s y_1) + y_1 \sin(y_0 y_s).$$

Во всех уравнениях, содержащихся в приведенной таблице, n означает отрицательную единицу (—1), параметры k и l двузначны и означают одно из двух чисел — 0 или 1. Параметр s многозначен и периодичен. Его численное значение выражается порядком той из осей симметрии, которая, как указано выше, выражается через него. Ради ясности период каждый раз указывается числом, стоящим сверху.

11. Изображение систем I порядка исчерпывается тем, что подвергаются рассмотрению все виды симметрии, которые свойственны этим системам. Но при этом может случиться, что для одного и того же типа параллелогонов и для одного и того же вида симметрии получатся различные

---

[7] Эта формула, как и все остальные основные формулы аналитической геометрии на плоскости, выраженные в новой системе координат, имеется во 2-й главе У. С. IV.

Как уже было показано выше, при введении новой системы координат задачи элементарной аналитической геометрии решаются проще. В качестве примера может служить нахождение одного примечательного свойства круга (вообще уже давно известного, но выведенного специально для прямоугольных координат), которое при выражении уравнения круга в новых координатах очень наглядно:

$$y_0^2 - 2y_0 y_1 \cos\alpha + y_1^2 = r^2 \sin^2\alpha.$$

Это свойство нашло применение в области кристаллографии при построениях в стереографической проекции (ср. «Универсальный метод в минералогии и петрографии» — Z. Kristallogr., Bd. XXI, S. 620).

системы, потому что элементы симметрии по отношению к колоннам и соответственно сторонам ориентированы различно.

Каждой из четырех плоскостей симметрии, имеющихся, например, в квадрате, соответствует разное значение, но по положению в системе не все четыре различны.

Решение вопросов такого типа относится к особому разделу учения о симметрии — к учению о видимой симметрии по К. Жордану (C. Iordon) или к симметрии положения [5].

Оба эти учения — учение о симметрии и учение о видимой симметрии — находятся между собой в той же связи, в какой находятся между собой метрическая геометрия и геометрия положения. Основные черты учения о видимой симметрии уже рассматривались ранее весьма подробно.[8]

Результат этого учения состоит в том, что виды видимой симметрии близки к видам действительной симметрии: их столько же по количеству, и для них могут применяться те же обозначения; например, о симметрии квадрата, так же как и о видимой симметрии любого параллелограмма, мы можем сказать, что она дитетрагональная.[9]

[8] Этот вопрос обсуждался в статье «Основные черты морфологии и систематики полиэдров» (1893 г.). Задача этой статьи уже видна из названия. К статье приложено историческое введение и особо обсуждается статья Эберхардта (Eberhard) «К морфологии полиэдров». В упомянутой работе дается метод для вывода всех видов полиэдров одного порядка из видов полиэдров предыдущего порядка. В то время как Х. Эберхардт заканчивает вывод IV порядком (названным им гептаэдр), в этой работе дается полный вывод не только семигранников, но также и восьмигранников и девятигранников. Каждый вид полиэдра обозначается посредством особого систематического символа, наглядно его выражающего, при этом подчеркивается, что даже для семигранника Х. Эберхардт допустил ошибку — изобразил меньше на один тип (у Х. Эберхардта 5 типов, в действительности же их 6).

Кроме обычных полиэдров (т. е. полиэдров только с трехгранными углами; эти полиэдры названы в Н. У. Ф. тригоноэдрическими и теоретическими) в этой работе дается также метод исчерпывающего изображения частных полиэдров. Благодаря этому вывод видов полиэдров достигает наивысшей обобщенности. Результат приводится в следующей таблице.

Порядок	Общие виды	Частные виды	Всего полиэдров
I	1	—	1
II	1	1	2
III	2	6	8
IV	6	40	46
V	17	—	—
VI	75	—	—

Кроме того, в той же работе приводится полный вывод парногранников V, VII и IX порядков, при этом учитывается дуализм.

В результате исчерпывающее число, представляющее типы, удваивается. Всего этого нет в работе Х. Эберхардта.

[9] Название вида симметрии берется от общей фигуры. Под общей фигурой понимается фигура, образующаяся благодаря тому, что берется сторона общего положения и на основе всех имеющихся элементов симметрии выводятся все другие стороны. Для рассматриваемого случая такой фигурой является д и т е т р а г о н.

Принимая во внимание точку зрения, основанную на учении о видимой симметрии, мы должны рассматривать как эквивалентные обе плоскости симметрии, следы которых параллельны сторонам квадрата, даже если в действительности отсутствуют оси симметрии 4-го порядка. То же относится и к общим диагональным плоскостям симметрии. Прямые и диагональные плоскости симметрии, исходя из того же принципа видимой симметрии, ни в коем случае не эквивалентны между собой.

Таким образом, при исчерпывающем рассмотрении возможных случаев необходимо учитывать этот принцип, тогда мы получим следующие системы, единственно возможные и при том различные между собой.

12. 1) 1 II и 2) 1 III обозначают две системы, в которых симметрия совершенно отсутствует. Число 1 должно выражать расположение в плоскости элементов симметрии, которые в этом случае как раз отсутствуют; II и III означают дипараллелогон и трипараллелогон (см. Приложение, табл. I).

3) 2 II и 4) 2 III означают две системы, в которых имеются только оси симметрии 2-го порядка, проходящие через центр единиц.

5) 3 II, если имеются только плоскости симметрии, параллельные паре сторон (выражаясь более обобщенно, параллельные направлению обеих колонн).

6) 4 II, 7) 4 III и 8) 4 III′, если также имеется только одна плоскость симметрии; в двух первых случаях она имеет диагональное положение, в третьем она перпендикулярна паре сторон.

9) 5 II, если имеются две плоскости симметрии и обе перпендикулярны сторонам.

10) 6 II, 11) 6 III. Имеются те же перпендикулярные плоскости симметрии. В дипараллелогоне они обе имеют диагональное положение; в трипараллелогоне только одна из них расположена диагонально, а другая перпендикулярна паре сторон.

12) 7 II. Имеется лишь одна единственная ось симметрии 4-го порядка, попадающая в центр.

13) 8 II. К оси симметрии 4-го порядка добавляются еще четыре плоскости симметрии.

14) 9 III. Имеется лишь одна единственная ось симметрии 3-го порядка, попадающая в центр.

15) 10 III и 16) 11 III. К оси симметрии 3-го порядка добавляются еще плоскости симметрии. В первом случае они перпендикулярны парам сторон, во втором — диагональны им.

17) 12 III. Имеется лишь одна единственная попадающая в центр ось симметрии 6-го порядка.

18) 13 III. К оси симметрии 6-го порядка добавляются плоскости симметрии.

13. Если мы внутри единицы возьмем произвольную точку, то элементы симметрии единицы, так же как и движения трансляционного смещения, обусловят бесконечное число аналогичных точек, которое будет называться *правильной системой точек*.

Исчерпывающий разбор таких плоских систем был сделан уже давно[10] и наглядно воспроизведен в Приложении (табл. I) графически; он обобщен также в табл. 3 в конце первой части книги посредством аналитических уравнений.

Каждая из этих систем характеризуется видом и положением элементов симметрии.

Перейдем теперь к решению этого же вопроса совсем другим путем, воспроизводя те же системы посредством симметрии отдельной плоской единицы и движений трансляционного смещения, хотя заранее сказать нельзя, придем ли мы и теперь к исчерпывающему изображению этих систем.

Чтобы с исчерпывающей полнотой изобразить все случаи расположения элементов симметрии, мы должны принять во внимание следующие, давно доказанные теоремы.[11]

Теорема 1. Если существует ось симметрии 0 наименования P и поступательное совмещение l, то существует также равнодействующая и параллельная ей ось 0′ того же наименования, занимающая такое положение, что она равно отстоит от оси 0 в ее данном положении и в том положении 1, которое та же ось 0 займет после совмещения; при этом плоскости, проходящие через ось 0′ и оси 0 и 1, образуют внутренний угол $2\frac{\pi}{p}$.

Замечание. В случае оси симметрии 2-го порядка равнодействующая ось 0′ находится между 0 и 1, следовательно, в направлении трансляции она удалена от оси 0 на половину величины трансляционного смещения, т. е. на $l/2$.

Теорема 2. Если существует плоскость симметрии и перпендикулярное к ней поступательное совмещение λ, то существует и равнодейст-

[10] Эта задача рассматривалась во II части У. С. IV. Так как эта часть по времени следовала за работой У. С. III, где были полностью приведены и выражены посредством алгебраических уравнений правильные системы точек в пространстве, то ее можно было решить чрезвычайно просто, считая в этих уравнениях первое значение координат равным 0.

Но так как этим вопросом уже раньше занимались два автора — К. Жордан (C. Gordan. Mémoires sur les groupes mouvements. Brioschi e Cremona Ann. matemat., Ser. II) и Л. Зонке (L. Sohncke. Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Borchardt, Journ. die reine und ang. Mathem., Bd 77), то ниже сравниваются их результаты.

Плоская система точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
К. Жордан (1869)	2	27	28	32	86	87	53	115	60	129	—	46	107	30	90	88	123
Л. Зонке (1879)	Не указано	XI	—	—	X	VI	IV	VII	VIII	IX	II	I	VIII	—	XIII	XII	V

[11] Эти теоремы (числом 8) содержатся в У. С. III. Здесь был применен аналитический метод. Позднее он был заменен более простым методом построения (Курс кристаллографии, 1897, §§ 2 и 3).

вующая плоскость симметрии, параллельная первоначальной и находящаяся от нее на расстоянии $\lambda/2$. Если поступательное совмещение не перпендикулярно, то посредине между двумя ближайшими плоскостями симметрии существует равнодействующая плоскость скользящего отражения; направление и величина ее элементарного движения совмещения есть направление следа этой плоскости и соответственно половина движения совмещения трансляции в этом направлении.

На основе обеих этих теорем определяются и помечаются номерами все системы точек, соответствующие найденным системам. Видно, что из 17 ранее приведенных систем точек 13 воспроизведены как лежащие в основе систем I порядка.

14. Все системы I порядка мы вывели из двух основных систем 8 II и 13 III, заменив принадлежащие им виды симметрии производными.

При этом некоторые элементы симметрии исчезают, но форма фигур и положение рядов и колонн остаются неизменными.

Следует принять во внимание, и это уже давно доказано, что системы, и соответственно их сингонии, могут преобразовываться посредством однородной деформации, не теряя присущего им свойства правильного деления плоскости.[12]

---

[12] Вопросу об однородных деформациях и положениям об однородных преобразованиях системы параллелогонов в работах автора уделялось много внимания. Сначала в Н. У. Ф. им были посвящены §§ 61, 62 и 63, и рассматривались они наипростейшим способом — путем построений. Наиболее общие из доказанных теорем следующие. Параллелогон, подвергаемый какой-либо совокупности растяжений и сдвигов, остается параллелогоном (§ 62). Любой данный параллелограмм посредством растяжений сдвигов может быть превращен в любой другой параллелограмм (теорема 15). Благодаря этому оказалось возможным выдвинуть новую теорему для площади: площадь параллелограмма равна произведению отрезка произвольной прямой между двумя параллельными сторонами на проекцию одной из сторон пары на направление, перпендикулярное ко взятой прямой.

Позднее этот вопрос подробно рассматривался в Э. А. К. в §§ I и III аналитическим путем как вопрос учения о проективности. Принцип аналитического рассмотрения вытекает из цели, поставленной в работе, — выработать простейшую систему кристаллографического вычисления. Хотя, согласно поставленной цели, задача кажется относящейся к трехмерному пространству, на деле она сводится к двухмерному, так как пространственные фигуры, относящиеся к этому вычислению, представляют собой собственно пучок плоскостей или пучок прямых, так что их можно определять как двухмерные фигуры. Ввиду этого задача самой общей проективности на плоскости рассматривалась особенно подробно.

Цель была успешно достигнута благодаря тому, что мы представили себе два комплекса кристаллических плоскостей: один, относящийся к общему виду, а другой, — к кубической сингонии; для последнего справедливы простейшие формулы вычисления. Один комплекс был изображен при помощи линейной, другой — при помощи гномонической проекции (т. е. линейной проекции полярного пучка прямых), а затем между ними были установлены самые общие (линейные) уравнения однозначной проективности, как между системой прямых и системой точек на плоскости. При этом простейшим способом были установлены формулы вычисления кристаллов для всех случаев; на основании этого была развита система кристаллографического вычисления, которая благодаря простоте операций, необходимых для вычисления, оставляет далеко позади себя все предложенные до настоящего времени системы. Эта система вычислений чрезвычайно успешно применялась даже на элементарных лекциях по кристаллографии

Было доказано, что такие системы могут подвергаться двум видам деформаций: а) растяжениям и б) сдвигам. Но деформации обоих видов приводят нас к системам, отдельные фигуры которых относительно фигур основной системы и между собой стоят в таком отношении, которое было названо Мёбиусом (Möbius) аффинитетом (Affinität).

Возможность таких деформаций, как уже упомянуто, обусловлена видом сингонии и может быть выражена следующими теоремами.

Теорема 1. В каждом единичном направлении может быть произведено положительное или отрицательное растяжение.

Например, если диагонали квадрата представляют собой единичные направления (стало быть, как в случае ромбической сингонии), то он может быть превращен в любой ромб, не теряя при этом основного свойства — правильного деления плоскости. Если единичны направления его сторон, то он может быть превращен в любой прямоугольник.

Теорема 2. Если все направления единичны (стало быть, как в случае моноклинной сингонии), то каждое из них может быть принято за ось сдвига.

Благодаря этому, например, квадрат может быть превращен в параллелограмм с любыми внутренними углами, так же как и с любым соотношением сторон. На основании этой теоремы квадрат после сдвига ни в коем случае не теряет присущего ему основного свойства — правильного выполнения плоскости.

Теорема 3. Если нет единичных направлений, то деформации невозможны.

Благодаря этим теоремам произведенный выше вывод правильного деления плоскости I порядка приобретает желательную универсальность.

15. Теперь пойдем дальше и исследуем вопрос: возможны ли такие системы, в которых единицы ориентированы различно. Если они возможны, то нам предстоит дать исчерпывающее изображение таких систем.

Для таких систем, если они вообще имеются, операция совмещения может рассматриваться как состоящая из двух следующих операций: 1) поворота вокруг оси, перпендикулярной (вертикальной) плоскости, на определенный угол α и 2) простой трансляции. К этому может быть еще присоединено отражение в вертикальной плоскости симметрии.

Рассмотрим сначала случай без отражения.

Вследствие известной элементарной теоремы кинематики комбинация поворота и перпендикулярной трансляции может рассматриваться как один поворот, при котором равнодействующая ось вращения получает определенное положение. Таким образом, можно считать, что вся система

в Горном институте в Санкт-Петербурге и в элементарном «Курсе кристаллографии» (гл. XI).

В качестве побочного результата следует отметить, что в тех случаях, когда проективной кривой (системы точек или системы прямых на плоскости) является эллипс (действительный или мнимый) или гипербола, обе коррелятивные системы могут быть приведены в полярное положение (в духе Шретера). Однако при параболе правильность этого положеия нарушается, и обе коррелятивные системы (за исключением одного особого случая) в полярное положение приведены быть не могут.

вращается вокруг этой оси и при этом снова приходит в совмещение со своим первоначальным положением. А когда достигнуто совмещение, тот же поворот, т. е. поворот вокруг той же оси и на тот же угол α, может быть повторен неопределенное число раз с тем же самым результатом. Из этого можно заключить, что угол поворота может быть определен выражением $\frac{2\pi}{p}$, где p — целое число; согласно определению, эта ось вращения является не чем иным, как осью симметрии. Вследствие этого мы приходим к выводу, что самой общей операцией конгруэнтного совмещения плоской системы является поворот вокруг оси симметрии.

Элементарный угол поворота не может быть бесконечно малым [7], так как в этом случае для конечного движения совмещения мы нашли бы равнодействующую ось вращения бесконечно удаленной; тогда движение совмещения следовало бы толковать просто как трансляцию совмещения.

Однако следует различать два существенно различных случая: или а) равнодействующая ось симметрии приходится на единицу, или б) она приходится на точку, находящуюся на периферии этой единицы.

В первом случае фигура сама является симметричной, и ось симметрии мы назовем явной. Во втором случае ось симметрии следует рассматривать как элемент симметрии связи.

16. Если к этим операциям добавляется еще отражение, то необходимо принимать во внимание следующую теорему: равнодействующим элементом симметрии оси симметрии p-го порядка и проходящей через нее плоскости симметрии является плоскость симметрии, которая образует с данной плоскостью внутренний угол $\frac{2\pi}{2p}=\frac{\pi}{p}$.[13]

На основании этой теоремы мы можем сделать вывод, что если в качестве операции совмещения выступает отражение, то следует рассматривать только положение равнодействующей плоскости симметрии и принять во внимание теорему 2 § 13.

Теперь плоскость симметрии может выступать как явная, тогда фигура сама является симметричной или она как таковая, или как плоскость скольжения становится элементом симметрии связи.

17. Так как число возможных ориентаций единиц является конечным, то среди них должны встречаться и одинаково ориентированные.

Если мы рассмотрим такую единицу, например ближайшую, то увидим, что благодаря этому уже определяется бесконечный конгруентный ряд с определенным направлением и определенным промежутком, а отсюда само собой следует, что совокупность одинаково ориентированных

---

[13] Так как в рассматриваемых здесь системах единицы ориентированы не одинаково, они не являются параллелогонами в строгом смысле слова. Как параллелогоны в строгом смысле слова могут рассматриваться находящиеся в связи с ними группы, в которых каждая единица представлена особой ориентацией. Такие фигуры, определяющиеся элементами симметрии связи, называют обычно планигонами. Относящийся сюда планигон соответствует по этой форме параллелогону системы I порядка.

фигур образует сетку; таким образом, мы можем применить выводы, сделанные для систем I порядка, и определить, что таким системам соответствуют только десять видов симметрии, которые со своей стороны группируются в четыре сингонии.

Если данная фигура сама не является параллелогоном (первичным или вторичным), то мы можем во всяком случае некоторое число единиц сгруппировать в один параллелогон. Вопрос состоит собственно в том, имеется ли внутри единицы такая точка, точки, аналогичные которой, в своей совокупности образуют плоскую сетку. Такие точки будут называться главными точками.

Если такая точка существует, то мы примем ее за центр первичного параллелогона, который явно имеет все элементы симметрии, встречающиеся в системе вообще. Тогда все движения совмещения данной единицы с прилежащими станут простыми трансляциями совмещения, а сама система станет системой I порядка. При такой трансформации единицы в операции совмещения ничто не меняется; трансформированная единица лежит в одной плоскости с данной, являющейся, таким образом, вторичным параллелогоном.

Если внутри единицы такой точки нет, то необходимо, чтобы она была на периферии этой единицы. Это просто доказать тем, что основания некоторых совокупностей осей симметрии обязательно должны образовывать плоскую сетку.

Таким образом, остается рассмотреть только случай, когда не имеется осей симметрии. Тогда элементы симметрии отсутствуют вовсе (система обязательно будет I порядка) или выступают исключительно параллельные плоскости симметрии и плоскости скольжения.

Но и этот случай, очевидно, не является исключением, так как и теперь имеются основные точки, т. е. каждая точка, лежащая в плоскости симметрии или в плоскости скольжения, или на средней линии между двумя соседними плоскостями, является основной.

18. Результат всех этих рассмотрений в том, что мы придем к исчерпывающему представлению обо всех типичных системах, если примем во внимание последовательно все виды симметрии и изберем для каждого из них в качестве исходной точки относящиеся к ним типы параллелогонов I порядка, но признаем за ними минимальную явную симметрию, т. е. все те виды симметрии, которые подчинены данному, а элементы симметрии, остающиеся свободными, будем рассматривать как элементы симметрии связи.

Величина симметрии тогда будет состоять из двух факторов: величины явной симметрии и величины симметрии связи, а их произведение даст величину симметрии всей системы.

Величина симметрии связи в таком случае равна числу ориентаций единиц системы. В особом случае асимметричных единиц это число равно, таким образом, величине симметрии всей системы.

19. Каждая система плоских единиц, согласно ее определению, может быть однозначно и строго определена посредством параллелогона и

его ориентаций в прилежащих единицах. Если параллелогон асимметричен, то ориентация прилежащих единиц может быть определена посредством всего одной операции, а именно: или а) посредством простой трансляции, или б) посредством элемента симметрии связи. Последняя операция может быть указана посредством одного характерного числа на той грани, по отношению к которой прилежащая пространственная единица имеет указанную ориентацию. Отсутствие такого характеризующего числа указывает на простую трансляцию.

Если единицы симметричны и их явная величина симметрии равна s, то они должны, как и все без исключения остальные единицы системы, рассматриваться как единицы, имеющие одновременно s различных ориентировок. Таким образом, и характерные числа для каждой стороны будут обозначены числом s. Для трансляции, естественно, эти числа будут отсутствовать.

Мы разобьем системы на группы различных порядков как по числу единиц различных ориентаций, так и по величине симметрии связи, т. е. получим число ориентаций и одновременно порядок системы посредством деления величины симметрии всей системы на величину явной симметрии.

20. При исчерпывающем изложении систем II и высших порядков мы будем следовать очередности порядков и при этом рассмотрим сперва системы дипараллелогонов, а затем — трипараллелогонов.

Всякий раз мы будем начинать с подробного описания производных форм системы, т. е. с форм возможного для каждого случая распределения одинаково ориентированных единиц системы. Это описание будет исчерпывающим, если рассмотреть по абсолютным расстояниям различные ближайшие, одинаково ориентированные единицы.

Каждый такой прием дает нам сразу определенный ряд с подчиненным ему направлением и отрезком. Если это направление не единичное, то мы сразу получаем по крайней мере два одинаковых ряда в различных направлениях, и сетка одинаково ориентированных пространственных единиц, а также и производная форма определяется. Если это направление единичное, то такой прием ведет к определению только одного ряда, и тогда нам предстоит применить еще другой прием. Число допущенных приемов, а следовательно, и число допустимых производных форм в этом случае будет больше.

Из этого следуют выводы: а) что нахождение производных форм является вопросом сингонии, а не симметрии и б) что производные формы более высоких сингоний для каждого данного порядкового числа системы находятся среди производных форм более низких видов сингоний.

Таким образом, производные формы ромбической сингонии содержатся в производных формах моноклинной сингонии, а производные формы тетрагональной и гексагональной сингонии — в производных формах ромбической сингонии.

21. Если определена производная форма, то ею обусловлены определенные отношения в ориентации различных единиц. Но при этом необходимо принимать во внимание и индивидуальные свойства соответствующих элементов симметрии. Эти свойства можно развить на основании теоремы § 13.

Опираясь на теорему 1, в отношении оси симметрии 6-го порядка мы можем заключить, что она никак не может выступать в качестве элемента симметрии связи. Но вследствие той же теоремы это ни в коем случае не является справедливым для осей 4-го, 3-го и 2-го порядков; первая может приходиться на вершину квадрата, вторая — на вершину правильного шестиугольника, а третья — на центр любой стороны вообще.

Наличие каждой из этих осей в качестве элемента симметрии связи показывает нам ориентацию двух прилежащих единиц (для осей 4-го и 3-го порядков) или только одной прилежащей единицы (для оси 2-го порядка), но ни в коем случае не ориентацию тех единиц, которые отделены от данной единицы параллельными и противоположными сторонами. При этом все ориентации, показываемые одной осью, различны.

Такие элементы симметрии связи мы будем называть *периферийными*.

Тогда вывод из этого рассуждения будет звучать так: *оси симметрии 4-го, 3-го и 2-го порядков, выступающие как элементы симметрии связи, являются периферийными.*

22. Если для плоскости симметрии приведены характерные числа, то они имеют разное значение в зависимости от относительного положения соответствующего элемента симметрии.

Если эти числа относятся к сторонам, параллельным следам данной плоскости симметрии, то они выражают саму *плоскость симметрии* как *периферийный* элемент симметрии. Но это относится только к системам дипараллелогонов, так как плоскость симметрии трипараллелогона, лежащая периферийно, одновременно является явной.

Если числа относятся к сторонам, перпендикулярным следам данной плоскости симметрии, то они выражают *плоскость скольжения* как *центральный* элемент симметрии связи. Сюда относится колонна II порядка.

Наконец, если эти числа относятся к сторонам, лежащим наклонно к следам плоскостей симметрии, то они выражают *плоскость скольжения* как *наклонно секущий* элемент симметрии связи.

23. Теперь мы можем рассмотреть вопрос о нахождении систем более высокого порядка.

Если данная единица связана трансляцией с прилежащей единицей, то благодаря этому образуется *колонна I порядка*, и тогда вся система представляет ряд параллельно прилежащих колонн I порядка, единицы которых, однако, имеют различную ориентацию. Направления таких колонн могут быть, однако, только единичными. Такие системы

колонн возможны, следовательно, только в моноклинной и ромбической сингониях.

При этом одинаково ориентированные единицы одной колонны могут быть связаны с данными посредством периферийных или секущих элементов связи. Если при этом имеется центральный элемент симметрии связи, то система может быть только II порядка. Так бывает вообще всегда, когда единицы одной колонны, отделенные данной единицей, ориентированы одинаково.

Мы будем помечать системы этого вида путем прибавления к ним буквы «*c*».

24. Две колонны I порядка, но различно направленные, обусловливают всю систему I порядка.

Таким образом, нам остается рассмотреть случай, когда ни одна из прилежащих единиц не связана трансляцией с данной.

При этом мы различаем два следующих важнейших варианта:

а) Противолежащие параллельные стороны помечены теми же характерными числами. В системах этого типа все колонны являются колоннами II порядка.

В качестве периферийных элементов симметрии могут выступать оси симметрии 2-го и 4-го порядков; на последних помечаются все четыре стороны, и система определяется однозначно.

Ось симметрии 3-го порядка не может, однако, выступать как периферийная, так как уже было бы достаточно наличия одной такой оси для этой системы, которая при этом должна была бы быть III порядка, в то время как такие системы могут быть только II и высших порядков.

Как центральные здесь могут выступать плоскости скольжения. Но если при этом плоскость скольжения является секущей, то можно определить только одну систему

Важность выделения систем такого вида в том, что им свойственно более простое определение посредством характерных чисел: ставятся только два числа, и по ним определяют числа, принадлежащие противоположным сторонам.

Эти системы мы будем называть ф а н е р о т и п н ы м и, так как все колонны для них четко выражаются характерными числами и при этом не появляется никаких центральных элементов симметрии в скрытой форме.

25. В варианте б) оба характерных числа одной колонны не всегда одинаковы для единиц, смежных с данной. Если мы возьмем одну колонну, то мы найдем, что данная единица связана с прилежащими (и только с прилежащими) определенным известным элементом симметрии связи; для следующих единиц соответствующий элемент имеется в скрытой форме и его можно определить только на основании специальных теорем. Поэтому мы назовем системы этого вида к р и п т о т и п н ы м и.

Сюда же относятся системы колонн порядка выше II и системы с периферийными осями симметрии 3-го порядка.

В этих системах могут также появляться в скрытой форме центральные плоскости скольжения тогда, когда из двух противоположных харак-

терных чисел одно выражает ось симметрии 2-го порядка, а другое — плоскость симметрии.

Специально для таких систем существует следующая теорема.

Если в колонне данная единица криптотипно связана с неприлежащей посредством центральной плоскости скольжения единичного направления, то перпендикулярная к ней колонна самое большое II порядка; если такой колонны вообще нет, то перпендикулярные к данной колонне ряды будут I порядка.

Пусть на рис. 3 имеется центральная криптотипная плоскость скольжения *abc*, показанная пунктиром; так как мы предположили, что она единична, то имеются точно такие же центральные плоскости скольжения во всех единицах системы. Пусть *d* будет прилежащей единицей к данной единице *a*. После скольжения по плоскости *abc* *d* займет положение *e*, причем *e* является единицей, прилежащей к *c*. Если мы подвергнем единицу *e* скольжению в противоположном направлении, приняв при этом за плоскость скольжения плоскость, центральную по отношению к ней самой, проходящую через центр единицы *e*, то единица *e* придет в положение *f*, т. е. одновременно станет прилежащей относительно *a*, будет принадлежать к той же колонне *daf*, как *d*, и будет одинаково ориентирована с *d*. Следовательно, колонна *daf* — II порядка.

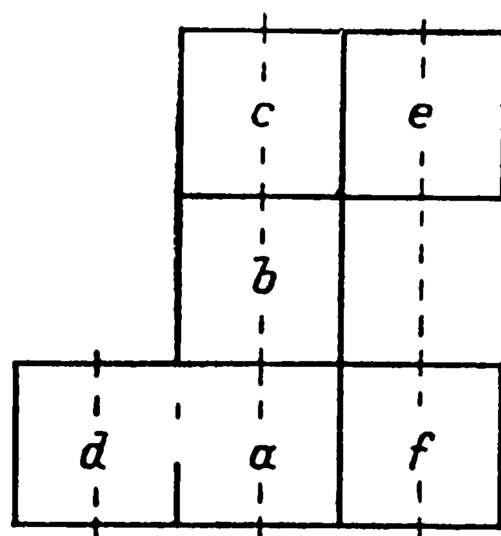


Рис. 3.

В случае, если единицы *d* и *f* не принадлежат к одной и той же колонне, перпендикулярной к *abc*, они обусловливают перпендикулярный к *авс* ряд I порядка.

Принадлежность к криптотипным системам показывается добавлением двух характеризующих чисел.

26. В только что описанном случае криптотипной колонны *abc* характерные числа, принадлежащие *d* или *f*, ни в коем случае не могут быть идентичны с одним из двух чисел, принадлежащих колонне *авс*, так как при таком предположении мы получили бы два ряда I порядка, например ряды *bd* и *bf*, а тогда колонна *abc* была бы II порядка. Однако они могут быть идентичны с числом, соответствующим единице *c*.

В этом случае сама единица не может содержать явного элемента симметрии. Выбор элемента симметрии связи для *d* и *f* также в высшей степени ограничен.

27. Если единица содержит явную симметрию, то следует различать два случая.

Или а) эта симметрия подчинена симметрии связи, например, если единица имеет оси симметрии 2-го порядка и при этом среди элементов симметрии связи есть оси симметрии 4-го порядка.

В этом случае порядок будет во столько раз ниже, чем для асимметричной единицы, сколько составляет число явной величины симметрии.

Или б) элементы явной симметрии не зависят от элементов симметрии связи. В этом случае порядок остается тот же. Такие системы можно вывести из асимметричных путем простого включения соответствующих элементов симметрии.

Однако при этом нужно всегда учитывать, допускает ли расположение элементов симметрии связи такое включение.

28. Теперь проследим ход изображения систем, приведенных в табл. 1.

Эта таблица разделена на 8 граф; в 1-й графе номера выражают производную форму, во 2-й — вид симметрии, в 3-й — величину симметрии

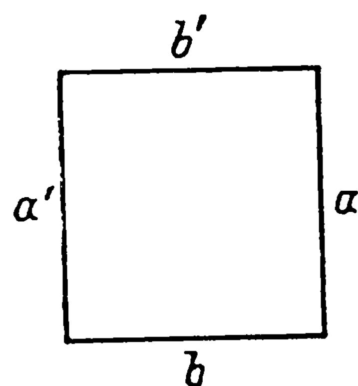


Рис. 4.

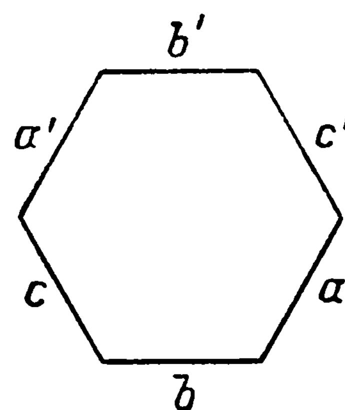


Рис. 5.

системы, в 4-й — нумерацию по видам симметрии, в 5-й — лежащий в основе тип системы I порядка, в 6-й — характерные числа явной симметрии, в 7-й — характеристические числа и, наконец, в 8-й дается обозначение найденной системы при помощи особого символа, первая часть которого выражает соответствующую систему точек, а вторая — явную симметрию единицы. Если данному виду симметрии подчинены различные типы параллелогонов I порядка, то к обозначению такого параллелогона при помощи нижнего числа добавляется еще обозначение соответствующего типа. Обозначения для систем колонн и криптотипной системы упоминались уже выше.

Значения букв 1-й графы для соответствующих параллелогонов поясняются на рис. 4 и 5. Затем на основании чисел 7-й графы можно сразу найти положение элемента симметрии связи.

29. Единственно возможными производными формами для систем дипараллелогонов II порядка и моноклинной сингонии являются те, которые обусловлены предположениями, что или а) одна из колонн — колонна I порядка, или б) нет колонн I порядка. Для первого предположения мы получаем характерные числа $a1$ или $1a$, причем число 1 выражает простую трансляцию. Для второго мы получаем соответствующие числа aa. Те же производные формы относятся и к ромбической сингонии.

Для тетрагональной сингонии действительна только форма aa.

30. Системы дипараллелогонов IV порядка допустимы только для ромбической и тетрагональной сингоний.

Единственно допустимыми производными формами ромбической симметрии соответственно являются колонны единичного направления; если нет, то мы получаем следующие.

I. Направления колонн единичны.

1	а	1	а	1
в	с	в	с	в
1	а	1	а	1
в	с	в	с	в
1	а	1	а	1

Рис. 6.

1	1	1	1	1
а'	а'	а'	а'	а'
в	в	в	в	в
а	а	а	а	а
1	1	1	1	1

Рис. 7.

1) В качестве ближайших единиц с одинаковой ориентацией примем единицы 02 и 20 (рис. 6). Получим фанеротипную систему *ав*.

2) В качестве ближайших одинаково ориентированных единиц примем единицы 04 и 10 (рис. 7). Получим криптотипную систему колонн *а*/*а*',

1	в	1	в	1
а'	а	а'	а	а'
в	1	в	1	в
а	а'	а	а'	а
1	в	1	в	1

Рис. 8.

в	а'	1	а	в
а	в	а'	1	а
1	а	в	а'	1
а'	1	а	в	а'
в	а'	1	а	в

Рис. 9.

где *а*/*а*' являются двумя характерными числами, принадлежащими к одной колонне и относящимися к двум прилежащим единицам.

3) В качестве ближайших одинаково ориентированных единиц возьмем единицы 04 и 12 (рис. 8). Получим криптотипную систему *а*/*а*'; *в*.

Дальнейшие предположения исключаются.

II. Направления колонн не единичны.

В этом случае единичны диагональные направления.

Из только что найденных производных форм кажется допустимой 1, т. е. I 1. В действительности же она не может быть представлена ни одной системой, так как отсутствуют необходимые элементы симметрии, потому что единственным относящимся к ней элементом симметрии является ось симметрии 2-го порядка.

Обе другие приведенные формы невозможны.

Единственной относящейся сюда производной формой является следующая: ближайшие одинаково ориентированные единицы 04 и 13 (рис. 9). Получаем криптотипную систему a/a'; a/a'.

Для тетрагональной сингонии допустима только производная форма *ав*.

31. Дипараллелогоны VIII порядка возможны только для тетрагональной сингонии, а именно для 6-го вида симметрии. При этом единицы обязательно асимметричны.

Так как теперь нет единичных направлений, то может быть только одна производная форма, та, которая соответствует предположению, что ближайшей одинаково ориентированной единицей является 22. Получаем криптотипную систему a/a'; $в/в'$.

32. Образование производных от систем II порядка настолько просто и понятно, что едва ли потребуются более подробные указания.

Для моноклинной системы в нашем распоряжении имеется только один элемент симметрии связи.

То же относится и к 3-му виду симметрии.

Для 4-го вида симметрии необходимо принимать во внимание лежащие в основе два различных типа I порядка. Далее, для каждого типа нужно рассматривать различные виды явной симметрии — 2-й и 3-й.

Для 5-го вида симметрии мы располагаем только 2-м видом симметрии как подчиненным.

Для 6-го вида симметрии нужно принимать во внимание как подчиненные 4-й и 5-й виды симметрии.

Что касается систем IV порядка, то единицы, принадлежащие к 4-му и 5-му видам симметрии, являются асимметричными, и при рассмотрении возможных комбинаций элементов симметрии связи нужно прежде всего принимать во внимание основные положения учения о видимой симметрии (§ 11) с тем, чтобы не принять одну и ту же систему за различные.

Этой же цели можно достичь, подробно рассмотрев различия систем, выражаемых одним и тем же символом, как, например, 16 (1 II_5) и 16 (1 II_5)′. Различия этих систем, например, совершенно очевидны, так как в первой в качестве элемента симметрии связи выступает ось симметрии 2-го порядка и центральная плоскость скольжения, во второй — две центральные плоскости скольжения.

Наконец, что касается систем VIII порядка, то наличие у них неотделимых чисел 3 и 7 совершенно очевидно и, наоборот, характерные числа 4 и 8 исключены, так как их присутствие имело бы необходимым следствием равенство нескольких чисел, что недопустимо на основании производной

формы. Таким образом, можно вывести лишь одну единственную, относящуюся сюда систему.

33. В основе систем трипараллелогонов II порядка лежит только одна производная форма, так как здесь формы *a*; 1 и *a*; *a* уже тождественны. Эти системы являются системами колонн. Такие системы невозможны для гексагональной сингонии (§ 23). Что же касается систем моноклинной и ромбической сингоний, то они так близко стоят к системам дипараллелогонов (в частности, системы ромбической сингонии к системам дипараллелогонов типов 4II и 6II), что соответствующий вывод можно было бы рассматривать почти как чистое повторение.

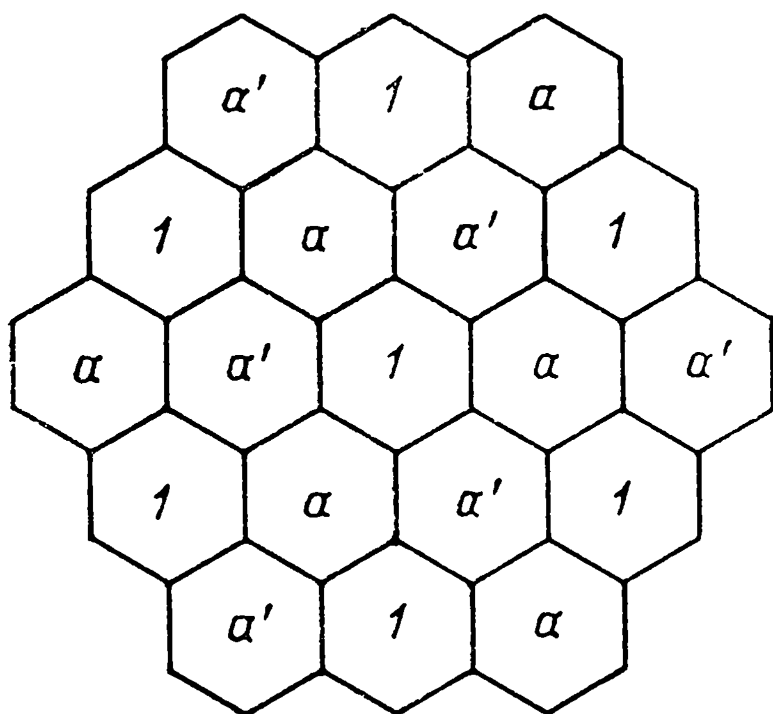


Рис. 10.

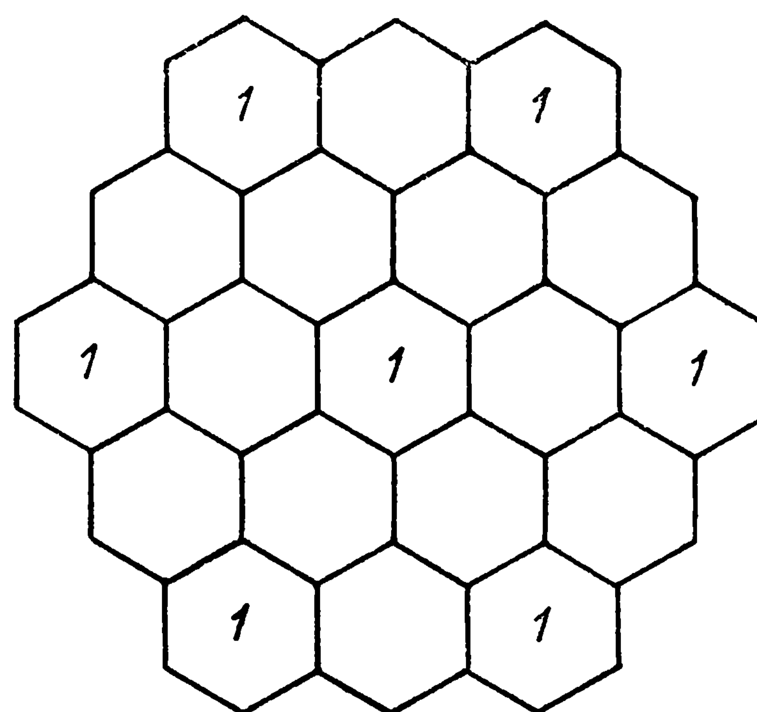


Рис. 11.

Совершенно особые отношения мы встречаем для систем гексагональной сингонии, для которой возможны только системы III порядка с единственной производной формой a/a'; a'/a' (рис. 10).

Единственно остающаяся возможной производная форма *ав* (рис. 11), которой соответствовали бы фанеротипные системы IV порядка, невозможна ни в ромбической, ни в гексагональной сингонии на том же основании, что и у систем дипараллелогонов, у которых единичные направления являются диагональными (§ 30), так как для этого нет необходимых элементов симметрии.

Этим с исчерпывающей полнотой решается задача, поставленная перед I частью.

Следует отметить, что теперь обнаружились и те правильные системы точек (14, 15, 16 и 17), которых нет в правильных делениях I порядка.

Таблица 1

Правильное деление плоскости II и высшего порядков

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Симметрия явная	Симметрия связи	Символ системы
				Система дипараллелогонов II порядка			
				I. Моноклинная сингония			
$a1$	2	2	1	2II	1	$a=5$	$2\,(1\text{II})^c$
aa	2	2	2	2II	1	$a=5$	$2\,(1\text{II})$
				II. Ромбическая сингония			
$a1$	3	2	1	3II	1	$a=2$	$3\,(1\text{II}_5)^c$
aa	3	2	2	3II	1	$a=2$	$4\,(1\text{II}_5)$
aa	3	2	3	4II	1	$a=4$	$14\,(1\text{II}_6)$
$a1$	4	4	1	5II	15	$a=26$	$15\,(2\text{II}_5)^c$
aa	4	4	2	5II	15	$a=26$	$6\,(2\text{II}_5)$
$a1$	4	4	3	5II	12	$a=56$	$15\,(3\text{II}_5)^c$
$1b$	4	4	4	5II	12	$a=56$	$5\,(3\text{II}_5)^c$
aa	4	4	5	5II	12	$a=56$	$6\,(3\text{II})_5$
aa	4	4	6	6II	15	$a=48$	$16\,(2\text{II}_6)$
aa	4	4	7	6II	14	$a=58$	$15\,(4\text{II}_6)$
				III. Тетрагональная сингония			
aa	5	4	1	7II	15	$a=37$	$7\,(2\text{II})$
aa	6	8	1	8II	1357	$a=2468$	$17\,(7\text{II})$
aa	6	8	2	8II	1256	$a=3478$	$17\,(5\text{II})$
aa	6	8	3	8II	1458	$a=2367$	$8\,(6\text{II})$
				Система дипараллелогонов IV порядка			
				II. Ромбическая сингония			
ab	4	4	1	5II	1	$a=2,\ b=5$	$15\,(1\text{II}_5)$
ab	4	4	2	5II	1	$a=6,\ b=5$	$16\,(1\text{II}_5)$
ab	4	4	3	5II	1	$a=2,\ b=6$	$5\,(1\text{II}_5)$
ab	4	4	4	5II	1	$a=6,\ b=2$	$16\,(1\text{II}_5)'$
$\frac{a}{a'},\ 1$	4	4	5	5II	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2}{5}$	$15\,(1\text{II}_5)^c_{25}$
$\frac{a}{a'},\ b$	4	4	6	5II	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2}{5},\ b=6$	$6\,(1\text{II}_5)_{25}$
$\frac{a}{a'},\ \frac{a}{a'}$	4	4	7	6II	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4}{5}$	$16\,(1\text{II}_6)_{45}$
				III. Тетрагональная сингония			
ab	5	4	1	7II	1	$a=3,\ b=7$	$7\,(1\text{II})$
ab	6	8	1	8II	18	$a=23,\ b=67$	$8\,(4\text{II})$
ab	6	8	2	8II	14	$a=36,\ b=27$	$17\,(4\text{II})$

Таблица 1 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Симметрия явная	Симметрия связи	Символ системы
Система дипараллелогонов VIII порядка							
$\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}$	6	8	1	8II	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2}{3}, \frac{b}{b'}=\frac{6}{7}$	$17\,(1\text{II})_{23}$
Система трипараллелогонов II порядка							
I. Моноклинная сингония							
aa	2	2	1	2III	1	$a=7$	$2\,(1\text{III})^{c}$
II. Ромбическая сингония							
*a*1	3	2	1	4III	1	$a=2$	$14\,(1\text{III})^{c}$
*a*1	3	2	2	4III′	1	$a=8$	$14\,(1\text{III})'^{c}$
*a*1	4	4	1	6III	17	$a=28$	$16\,(2\text{III})^{c}$
*a*1	4	4	2	6III	12	$a=78$	$15\,(4\text{III}')^{c}$
*a*1	4	4	3	6III	18	$a=27$	$15\,(4\text{III})^{c}$
Система трипараллелогонов III порядка							
IV. Гексагональная сингония							
$\frac{a}{a'}, \frac{a'}{a}$	7	3	1	9III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{9}$	$9\,(1\text{III})_{59}$
$\frac{a}{a'}, \frac{a'}{a}$	8	6	1	11III	1 · 12	$\frac{a}{a'}=\frac{45}{89}$	$11\,(4\text{III})_{48}$
Система трипараллелогонов IV порядка							
$\frac{a}{a'}, 1$	4	4	1	6III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2}{7}$	$16\,(1\text{III})^{c}_{27}$

Таблица 2

Уравнения правильных точечных систем в плоскости[14]

№	Вид симметрии	В линейных координатах	Современные обозначения
		А. Симморфные системы	
		I. Моноклинная сингония	
1	1	$z = c + \lambda_0,\ \nu = d + \lambda_1$	1 — $p1$
2	2	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = n^k d + \lambda_1$	2 — $p2$
		II. Ромбическая сингония	
3	3	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = d + \lambda_1$	m — pm
4	3	$z = n^k c + f\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = d + f\frac{\lambda_1}{2}$	m — cm

[14] Как сами виды симметрии (примечание, с. 12), так и правильные плоские системы точек могут быть выражены, помимо прямоугольных координат, в векторах, как это видно из следующего сопоставления (У.С.IV, § 42).

Уравнения правильных плоских точечных систем

№	Вид симметрии	В линейных координатах	В векторном виде
		А. Симморфные системы	
		I. Моноклинная сингония	
1	1	$z = c + \lambda_0,\ \nu = d + \lambda_1$	$V = a + bi + \lambda_0 + B(\lambda_0' + \lambda_1' \cdot i)$
1	2	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = n^k d + \lambda_1$	$V = n^l(a + bi) + \lambda_0 + B(\lambda_0' + \lambda_1' \cdot i)$
		II. Ромбическая сингония	
3	3	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = d + \lambda_1$	$V = a + n^k b \cdot i + \lambda_0 + \lambda_1 i$
4	3	$z = n^k c + f\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = d + f\frac{\lambda_1}{2}$	$V = a + n^k bi + f\frac{\lambda_0}{2} + f\frac{\lambda_1}{2} \cdot i$
5	4	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = n^l d + \lambda_1$	$V = n^l a + n^k bi + \lambda_0 + \lambda_1 \cdot i$
6	4	$z = n^k c + f\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = n^l d + f\frac{\lambda_1}{2}$	$V = n^l a + n^k bi + f\frac{\lambda_0}{2} + f\frac{\lambda_1}{2} \cdot i$

Таблица 2 (*продолжение*)

№	Вид симметрии	В линейных координатах	Современные обозначения
5	4	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = n^l d + \lambda_1$	$mm - pmm$
6	4	$z = n^k c + f\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = n^l d + f\frac{\lambda_1}{2}$	$mm - cmm$
		III. Тетрагональная сингония	
7	5	$y_0 = b_s^4 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+1}^4 + \lambda_0$	$4 - p4$
8	6	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+n^k}^3 + \lambda_0$	$4mm - p4m$
		IV. Гексагональная сингония	
9	7	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+1}^3 + \lambda_0$	$3 - p3$
10	8	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+n^k} + \lambda_0$	$3m - p3m1$
11	8	$y_0 = b_s^3 + f\frac{\lambda_0}{2},\ y_1 = b_{s+n^k}^3 + f\frac{\lambda_0}{2}$	$3m - p31m$
12	9	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+1}^6 + \lambda_0$	$6 - p6$
13	10	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+n^k}^6 + \lambda_0$	$6mm - p6m$

№	Вид симметрии	В линейных координатах	В векторном виде
		III. Тетрагональная сингония	
7	5	$y_0 = b_s^4 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+1}^4 + \lambda_0$	$V = \sqrt[4]{\sqrt{a + bi}} + \lambda_0 + i\lambda_0$
8	6	$y_0 = b_s^4 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+n^k}^4 + \lambda_0$	$V = \sqrt[4]{\sqrt{a + n^k bi}} + \lambda_0 + i\lambda_0$
		IV. Гексагональная сингония	
9	7	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+1}^4 + \lambda_0$	$V = \sqrt[3]{\sqrt{a + bi}} + \lambda_0 + B(1 + \sqrt{3}\cdot i)\frac{\lambda_0}{2}$
10	8	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+n^k}^3 + \lambda_0$	$V = \sqrt[3]{\sqrt{a + n^k bi}} + \lambda_0 + B\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i\right)\frac{\lambda_0}{2}$
11	9	$y_0 = b_s^3 + f\frac{\lambda_0}{3},\ y_1 = b_{s+n^k}^3 + f\frac{\lambda_0}{3}$	$V = \sqrt[3]{\sqrt{a + n^k bi}} + \lambda_0 + B(1 + \sqrt{3}\cdot i)\frac{\lambda_0}{2}$
12	9	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+1}^6 + \lambda_0$	$V = \sqrt[6]{\sqrt{a + bi}} + \lambda_0 + B(1 + \sqrt{3}\cdot i)\frac{\lambda_0}{2}.$

Таблица 2 (*окончание*)

№	Вид симметрии	В линейных координатах	Современные обозначения
		Б. Асимморфные системы	
		II. Ромбическая сингония	
14	3	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = d + k\frac{\lambda_1}{2}$	$m - pg$
15	4	$z = n^k c + l\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = n^l d + \lambda_1$	$mm - pmg$
16	4	$z = n^k c + l\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = n^l d + k\frac{\lambda_1}{2}$	$mm - pgg$
		III. Тетрагональная сингония	
17	6	$y_0 = b_s^4 + (f + k)\frac{\lambda_0}{2},\ y_1 = b_{s+n^k}^4 + f\frac{\lambda_0}{2}$	$4mm - p4g$

№	Вид симметрии	В линейных координатах	В векторном виде
13	10	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0,\ y_1 = b_{s+n^k}^6 + \lambda_0$	$V = \sqrt[6]{\sqrt{a + n^k bi}} + \lambda_0 + B(1 + \sqrt{3}\cdot i)\frac{\lambda_0}{2}$.
		Б. Асимморфные системы	
		I. Ромбическая сингония	
14	3	$z = n^k c + \lambda_0,\ \nu = d + k\frac{\lambda_1}{2}$	$V = a + n^k bi + k\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cdot i$
15	4	$z = n^k c + l\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = n^l d + \lambda_1$	$V = n^l a + n^k bi + l\frac{\lambda_0}{2}\cdot i + \lambda_1$
16	4	$z = n^k c + l\frac{\lambda_0}{2},\ \nu = n^l d + k\frac{\lambda_1}{2}$	$V = n^l a + n^k bi + k\frac{\lambda_0}{2} + l\frac{\lambda_1}{2}\cdot i$
		II. Тетрагональная сингония	
17	6	$y_0 = b_s^4 + (f + k)\frac{\lambda_0}{2}$, $y_1 = b_{s+n^k}^4 + f\frac{\lambda_0}{2}$	$V = \sqrt[4]{\sqrt{a + n^k bi}} + (f + k)\frac{\lambda_0}{2} + f\frac{\lambda_1}{2}\cdot i$

Таблица 3

Сопоставление правильных точечных систем и их упорядоченных регулярных делений плоскости

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I. Моноклинная сингония												
1	1	II	—	—	—	III	—	—	—	1	1	2
2	2	II	$(1II)^c$ (1II)	—	—	III	1 $(III)^c$	—	—	3	2	5
								Итого		4	3	7
II. Ромбическая сингония												
3	3	II	$(1II_5)^c$	—	—	—	—	—	—	2	—	2
4	3	II	$(1II_5)$	—	—	III III′	—	—	—	2	2	4
14	3	—	$(1II_6)$	—	—	—	$(1III)^c$ $(1III)'^c$	—	—	1	2	3
5	4	II	$(3II_5)^c$	$(1II_5)$	—	—	—	—	—	3	—	3
6	4	II	$(2II_5)$ $(3II_5)$	$(1II_5)_{25}$	—	III	—	—	—	4	1	5
15	4	—	$(2II_5)^c$ $(3II_5)^c$ $(4II_6)$	$(1II_5)$ $(1II_5)^c_{25}$	—	—	$(4III')^c$ $(4III)^c$	—	—	5	2	7
16	4	—	$(2II_6)$	$(1II_5)$ $(1II_5)'$ $(1II_6)_{45}$	—	—	$(2III)^c$	—	$(1III)^c_{27}$	4	2	6
								Итого		21	9	30
III. Тетрагональная сингония												
7	5	II	(2II)	(1II)	—	—	—	—	—	3	—	3
8	6	II	(6II)	(4II)	—	—	—	—	—	3	—	3
17	6	—	(7II) (5II)	(4II)	$(1II)_{23}$	—	—	—	—	4	—	4
								Итого		10		10
IV. Гексагональная сингония												
9	7	—	—	—	—	III	—	$(1III)_5$	—	—	2	2
10	8	—	—	—	—	III	—	—	—	—	1	1
11	8	—	—	—	—	III	—	$(4III)_{48}$	—	—	2	2
12	9	—	—	—	—	III	—	—	—	—	1	1
13	10	—	—	—	—	III	—	—	—	—	1	1
Итого		8	16	10	1	10	6	2	1	—	7	7
								Общая сумма		35	19	54

Обозначения. Графы: 1 — номер правильной точечной системы, 2 — вид симметрии, системы дипараллелогонов: 3 — I порядка, 4 — II порядка, 5 — IV порядка, 6 — VIII порядка, системы трипараллелогонов: 7 — I порядка, 8 — II порядка, 9 — III порядка, 10 — IV порядка, 11 — количество систем дипараллелогонов, 12 — количество систем трипараллелогонов, 13 — общая сумма систем дипараллелогонов и трипараллелогонов.

ЧАСТЬ II

ПРАВИЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА

Стоящая теперь перед нами задача связана многочисленными аналогиями с только что разрешенной; благодаря этому ее рассмотрение облегчено в такой степени, что на это исследование можно смотреть в известной мере как на повторение первой части. Конечно, значительно усложняются частные задачи, а число получаемых решений сильно увеличивается.

1. Здесь также следует различать в первую очередь два основных вида правильного деления пространства: или а) все пространственные фигуры ориентированы параллельно, или б) имеются фигуры и в непараллельном положении. Системы, соответствующие первому предположению, и здесь будут обозначаться как *системы I порядка*. Мы начнем наше исследование с исчерпывающего отыскания этих систем.

2. Возьмем две произвольные фигуры системы. Они связаны друг с другом простой трансляцией, являющейся одновременно трансляцией совмещения для всех других пространственных единиц. Для этой трансляции мы получим определенное направление и определенную величину. Совмещение может быть повторено в данном направлении и на одну и ту же величину произвольное число раз, и всякий раз вся система придет в совмещение сама с собой. Каждая отдельная произвольно выбранная единица вместе с данной определяет конгруэнтный ряд пространственных фигур. Если мы возьмем из системы еще третью единицу, не принадлежащую этому ряду, то получим другой конгруэнтный ряд, другого направления и с другим отрезком совмещения. Оба ряда, взятые вместе, определяют *плоскую сетку*. Если мы рассмотрим еще третью единицу, не принадлежащую этой сетке, то получим третий конгруэнтный ряд нового направления, с особым присущим ему отрезком. Каждая единица этого последнего ряда может служить исходным пунктом для построения сетки, параллельной только упомянутой сетке, а совокупность этих равных и параллельных сеток образует *пространственную решетку* (выражаясь аналитически — квадратичную форму 3-й степени).

3. Если мы рассмотрим две прилежащие (т. е. имеющие одну общую грань) единицы, то получим ряд особого вида, в котором каждые две соседние единицы являются прилежащими. Такие ряды мы будем называть колоннами I порядка. Если же члены ряда имеют только одну общую точку, то такие ряды мы назовем рядами колонн.

Таким образом, вся система может рассматриваться как система прилежащих равных и параллельных колонн I порядка.

Две колонны, имеющие одну общую единицу (можно также сказать пересекающиеся в этой единице), определяют особую плоскую сетку, в которой все единицы имеют общие грани с соседними единицами. Такую сетку мы будем называть слоем I порядка.

Вся система может рассматриваться как совокупность таких параллельных равных и прилежащих слоев.

Каждый слой подчинен слоевой плоскости, определяемой двумя направлениями, определяемыми колоннами слоя.

Если два параллельных ряда колонн имеют одну общую граничную плоскость, то все члены одного ряда являются прилежащими по отношению к членам другого ряда, и тогда образуется особая сетка, состоящая только из параллельных колонн, а каждая из этих колонн имеет общие граничные линии с двумя соседними. Такие сетки мы назовем сетками слоев.

Особое примечание. Под плоскостью слоя [1] следует понимать не отдельную плоскость, а комплекс параллельных плоскостей. Это понятие аналогично понятию направлений у прямых.

К сожалению, в геометрии нет подходящего выражения, но оно применяется в теоретической механике при рассмотрении пар сил. Такая пара, имеющая собственное отношение к плоскости слоя, может быть изображена перпендикулярной к ней прямой определенного направления (и, кроме того, определенной длины). Под выражением «плоскость слоя» мы можем теперь также понимать плоскость, перпендикулярную определенному направлению.

4. Каждой колонне I порядка подчинена ограничивающая плоскость пространственной единицы. Но так как каждая единица благодаря трансляции в направлении, соответствующем этой колонне, на свойственный ей отрезок приходит в совмещение с прилежащими к ней, то она обязательно должна иметь две такие равные и параллельные плоскости, и при этом по две точки, подчиненные этим граням, лежат на прямых, параллельных упомянутым направлениям, на одном и том же расстоянии; это расстояние равно упомянутому отрезку.

Из этого мы можем сделать вывод, что пространственные единицы I порядка ограничены только подчиненными друг другу равными и параллельными парами граней. Таким образом, число граней пространственной единицы четное. Мы будем называть поэтому такие пространственные единицы параллелоэдрами.

5. Как пары граней каждой данной колонны являются подчиненными, так и линии пересечения двух таких граней, ребра, подчинены плоскостям слоя, которые определяются соответствующими направлениями.

Эта подчиненность приводит нас к выводу, что все ребра пространственной единицы, подчиненные одной плоскости слоя, являются равными и параллельными. Точки этих ребер также подчинены друг другу, так как каждой данной точке ребра соответствует по одной подчиненной точке на всех параллельных ребрах единицы. Подчинение выражается в направлениях колонн и соответствующих им отрезках.

6. Совокупность граней, пересекающихся в равных и параллельных ребрах, мы будем называть первичной зоной.

Таким образом, мы можем сказать, что если две грани пересекаются в одном ребре, то этим граням подчинена определенная первичная зона плоскости слоя, которая в свою очередь определяется направлениями колонн, определяемых данными гранями.

Каждая первичная зона пересекается с плоскостью слоя в определенных точках. А вся система пересекается этой плоскостью в системе параллелогона I порядка.

Подчиненные первичным зонам плоскости слоев мы назовем основными плоскостями системы.

Таким образом, мы можем сказать, что системы параллелоэдров пересекаются основными плоскостями в системах параллелогонов (если эти плоскости проходят через точки подчиненных им ребер).

Первичные зоны параллелоэдров являются параллелогональными. Следовательно, они могут быть или а) дипараллелогональными, или б) трипараллелогональными.[1]

7. Если имеются две пары граней, не образующих пересекающихся ребер, то они все же относятся к двум направлениям колонн; совокупность таких граней, которую мы будем называть вторичной зоной, подчинена плоскости слоя.

Теперь легко доказать, что не все зоны могут быть шестигранными, что обязательно должны существовать и четырехгранные.

Представим себе прямые, проведенные через точку, принятую за центр сферы, во всех направлениях колонн. Точки пересечения этих прямых со сферой примем за точки касания граней типичного полиэдра.[2]

---

[1] Теория зон как раздел геометрии положения была довольно подробно освещена в Н. У. Ф., где ей посвящена специальная глава (12). Но при этом принимались во внимание исключительно полиэдры, определяемые гранями. Главным предметом исследования там являются зоноэдры, ограниченные исключительно первичными зонами.

[2] Понятие типичного полиэдра было также введено в Н. У. Ф., и там, как и во всех работах автора по этому вопросу, оно играет роль основного понятия, на котором базируется теория полиэдров вообще и их классификация в частности. Типичный полиэдр рассматривается как особый типичный член бесконечной совокупности полиэдров, которые объединяет то, что все их грани параллельны (или могут быть поставлены параллельно) и, естественно, число граней одинаково. Эта совокупность рассматри-

Для него действительно равенство

$$(f-1)f=1\cdot 2\cdot p_2+2\cdot 3\cdot p_3+\ldots+(m-1)mp_m, \qquad \text{(А)}$$

где число f — число (плоских) пар граней, а p_m — число первичных или вторичных зон, каждая из которых имеет $2m$-граней.

Теперь представим себе зоноэдр, подчиненный полярно этому полиэдру, построенный так, что прямые, перпендикулярные к его граням, мы примем за оси зон или, что то же самое, полюса граней первого примем за полюса большого круга на сфере, а затем все точки пересечения всех проведенных так больших кругов на сфере примем за полюса граней нового полиэдра.

Этот зоноэдр, т. е. полиэдр, окруженный только первичными зонами, связан с парногранником следующими соотношениями: а) число первичных зон зоноэдра равно числу пар граней парногранника, б) число граней первого равно числу первичных или вторичных подчиненных зон последнего.

Но для любого зоноэдра действительно равенство

$$(p-1)p=1\cdot 2\cdot f_2+2\cdot 3\cdot f_3+\ldots+(m-1)mf_m, \qquad \text{(Б)}$$

где p — число первичных зон, а f_m — число граней $2m$-порядка.

Если бы в первом все зоны были 6-гранные, то и в последнем все грани были бы 6-гранные, что, однако, невозможно.[3]

8. Рассмотрим пару граней. Каждая другая пара определяет первичную или вторичную зону. В количестве f — 1 каждая четырехгранная зона содержится один раз, каждая шестигранная — два раза..., каждая $(2-m)$-гранная зона — $(m-1)$ раз.

Таким образом,

$$f-1=1\cdot p_2+2p_3+\ldots+(m-1)p_m.$$

Если мы сложим эти равенства относительно всех плоскостей, принимая во внимание, что в этой сумме член $(m-1)p_m$ повторится m раз, то получим в результате

$$(f-1)f=1\cdot 2\cdot p_2+2\cdot 3\cdot p_3+\ldots+(m-1)_m\cdot p_m. \qquad \text{(В)}$$

По форме это равенство идентично равенству (А). Но равенство (А) было доказано до сих пор исключительно для полиэдров, как тел, ограниченных плоскостями. Теперь же то же равенство (В) действительно для

вается как род полиэдра, т. е. основной член классификации, развиваемой в этой и в других работах. Полиэдр, полярно сопряженный типичному полиэдру, назван субтипичным. Упомянутые отношения рассмотрены весьма подробно в Н. У. Ф., в §§ 20—22 (кроме того, аналогичные рассуждения можно найти в некоторых произведениях современной геометрии). В первую очередь всегда строился полиэдр, во всех вершинах углов которого встречаются по три грани. Такие полиэдры назывались теоретическими, а все другие, частные, рассматривались как полиэдры, некоторые ребра которых бесконечно малы (такое толкование много позже мы находим у Эберхардта).

[3] Это положение содержится еще у Лежандра (Legendre. Elements de Geometrie; например, 15-е изд., 1862, с. 307). Позднее оно неоднократно воспроизводилось (между прочим, в Н. У. Ф., § 24, где приводятся также исторические сведения).

любых пространственных фигур с одним лишь ограничением — эти фигуры, с которыми мы теперь имеем дело, являются парногранниками.

9. Зоны теперь самое большее шестигранные (§ 6). Но так как существуют и четырехгранные зоны, то мы можем выбрать одну плоскость слоя, соответствующую этому условию, т. е. такую, по две колонны которой пересекаются в одной единице.

На основании того что единица в направлении колонны имеет не больше двух прилежащих плоскостей, допустимы лишь следующие предположения.

1) Данная единица имеет с единицами рассматриваемых прилежащих единиц слоя лишь одну прилежащую. Тогда она ограничена тремя парами граней, образующими три четырехгранные зоны (в равенстве (B) $f=3$, $p_2=3$, $p_3=0$). Такие пространственные единицы называются трипараллелоэдрами.

2) Колонна смежного слоя по отношению к колоннам первого является прилежащей лишь к одной колонне первого слоя. Но каждая единица колонны является прилежащей к двумя соседним. В таком случае только одна зона шестигранная, т. е. $f=4$, $p_2=3$, $p_3=1$. Такие пространственные фигуры называются тетрапараллелоэдрами.

3) Остается лишь одно предположение: каждая колонна прилежащего слоя по отношению к двум смежным колоннам данного является прилежащей, и при этом каждая единица каждой колонны имеет две прилежащие единицы в смежных колоннах.

Здесь следует различать два случая: данный слой является прилежащим только по отношению к паре параллельных ему слоев или он может быть смежным двум парам слоев. Это зависит от того, существует ли направление, в котором прилежащие единицы колонны имеют соседями по одной единице из первого и второго слоев, или этого нет.

В этом случае мы имеем $f=6$, $p_2=3, p_3=4$.

Такие пространственные единицы называются гексапараллелоэдрами.

Во втором случае мы имеем $f=7$, $p_2=3$, $p_3=6$.

Такие пространственные единицы называются гептапараллелоэдрами.

Уже давно доказано, что среди относящихся сюда пространственных фигур встречаются такие простейшие фигуры, ограниченные плоскостями, которые мы можем рассматривать, как типы.[4] Эти полиэдры изображены на рис. 12—15.

---

[4] Этот вывод был сделан автором еще в конце 70-х годов. Как раз на его основе автором была развита специальная теория кристаллической структуры, проверенная путем прямого опыта. [Непосредственное и исчерпывающее доказательство правильности федоровской теории стало возможно после открытия в 1912 г. М. фон Лауэ дифракции рентгеновских лучей в кристаллах. С тех пор расшифрованы многие тысячи структур кристаллов и среди них нет ни одной, симметрия которой не могла бы быть описана в рамках выведенных Е. С. Федоровым 230 пространственных групп (*прим. ред.*)]. Это произошло в начале 80-х годов и нашло отражение в ряде докладов в Санкт-Петербургском минералогическом обществе (Записки Санкт-Петербургского минералогического общества, т. 17, с. 381; т. 18, с. 281, 282).

Приведенные типы параллелоэдров следует считать **первичными**, в то время как все другие могут рассматриваться как варианты, образованные от первичных вторично, — путем замены ограничивающих плоскостей любыми другими плоскостями с тем лишь ограничением, что вновь по-

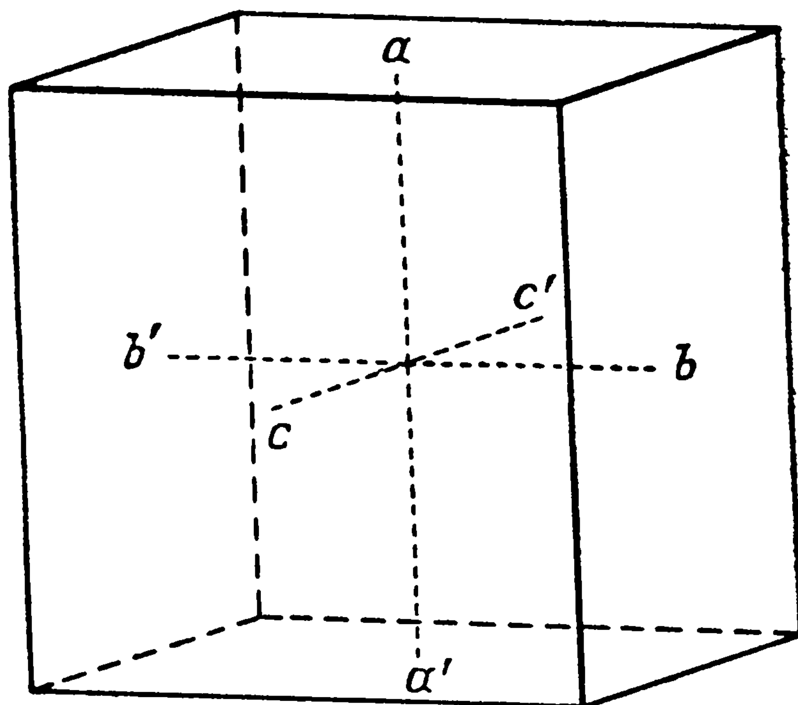


Рис. 12.

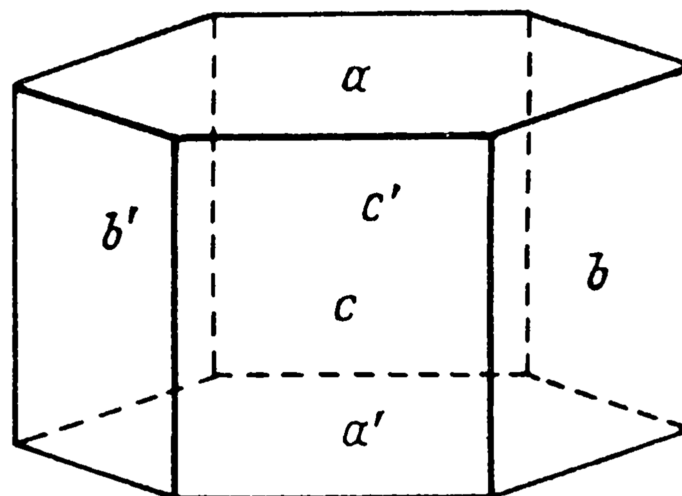


Рис. 13.

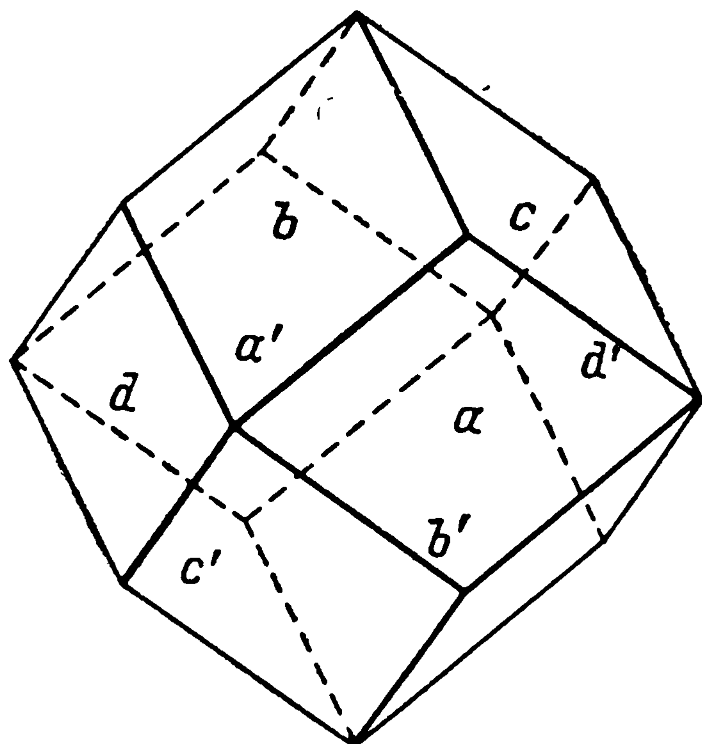


Рис. 14.

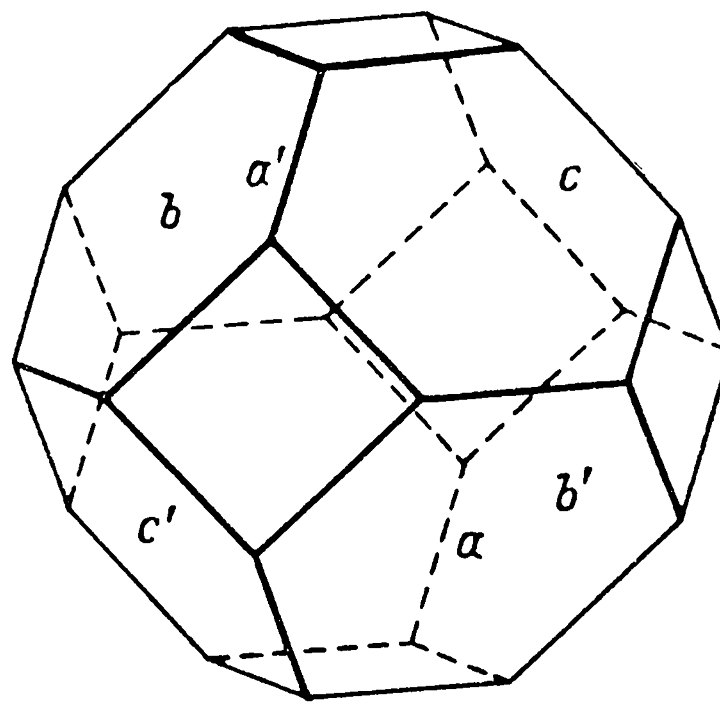


Рис. 15.

строенные равные и параллельные плоскости не должны пересекаться друг с другом, так как иначе не образуются замкнутые пространственные фигуры.

Следующее ограничение влечет за собой симметрия. Достаточно наличия одной оси 2-го порядка составной симметрии [2] (центр инверсии), чтобы устранить возможность кривых плоскостей.[5] Но симметрия может стать значительно выше.

[5] Доказательство этого положения не принималось первоначально как очевидное, оно содержится в теоремах § 76 Н. У. Ф.

Возможность присутствия плоскостей симметрии очевидна. Но возможность нахождения определенных осей симметрии зависит от распределения колонн и от порядка зон. В этом отношении параллелоэдры следует разделить на две группы. К первой группе относятся трипараллелоэдры, гексапараллелоэдры и гептапараллелоэдры, которые допускают наличие оси симметрии не выше 4-го порядка. Высшим из трех относящихся сюда видов симметрии является гексаоктаэдрический с величиной симметрии 48. Ко второй группе относятся лишь трипараллелоэдры, для которых максимально допустимой является ось симметрии 6-го порядка. Наивысшим видом симметрии здесь будет дигексагонально-бипирамидальный с величиной симметрии 24.

Само собой разумеется, что к этим параллелоэдрам принадлежат и все другие виды симметрии, которые подчинены этим, наиболее высоким.

10. Задача отыскания всех, относящихся сюда видов симметрии относится к чистому учению о симметрии и уже давно исчерпывающе решена. Это 32 вида симметрии кристаллографии,[6] которые теперь описываются даже в элементарных учебниках по этому предмету.

---

[6] Полный перечень элементов симметрии был дан в У. С. II во Введении на основании теорем кинематики. Но при этом не была достаточно подробно описана сложная симметрия, и теперь следует восполнить этот пробел.

Еще раньше, совсем элементарным путем, было проведено исчерпывающее отыскание всех видов симметрии трехмерного пространства в Н. У. Ф. Оно было основано на предварительном выводе всех типичных изоэдров, для чего были даны специальные формулы (§ 25).

Представим себе конечную фигуру, имеющую величину симметрии $4p$ и при этом ось симметрии 4-го порядка, где p — очень большое целое число. Количество равнозначных направлений мы можем тогда изобразить рядом чисел:

$$1\ 2\ 3 \ldots (2p-1)\ 2p,$$
$$1'2'3' \ldots (2p-1)'(2p)'.$$

Каждое отдельное число этого ряда выражает особый элемент симметрии. Теперь попытаемся выяснить значение всех этих чисел.

Ряды $2\ 4\ 6 \ldots (2p-2)\ (2p)$ и $2'4'6' \ldots (2p-2)'(2p)'$ имеют очень простое толкование. Каждое число в отдельности выражает определенную вертикальную плоскость симметрии или горизонтальную ось симметрии 2-го порядка. Но число 3 выражает ось симметрии p-го порядка и поэтому неразрывно связано с рядом $5\ 7 \ldots$ Вообще, нечетные числа $3\ 5\ 7 \ldots$ выражают оси симметрии, порядок которых легко определить; число 5, например, выступает как неразрывный член ряда $1\ 5\ 9\ (13)$ и, если p — четное, выражает ось симметрии $p/2$ порядка; аналогично для числа 7 мы получим ряд $1\ 7\ (13)\ (19) \ldots$, он выражает, если число p делится на 3, ось симметрии $p/3$ порядка.

Для нечетных чисел ряда $1'\ 3'\ 5'\ 7' \ldots$ мы получим другие значения.

По порядку числа $3'$, $5'$, $7'$ обусловливают следующие ряды чисел: а) $1'\ 3'\ 5\ 7' \ldots$ б) $1 5'\ 9\ (13') \ldots$ в) $1 7'\ (13)\ (19') \ldots$ и т. д.

Если мы, следуя принципам учения о симметрии, возьмем для p четное число, то ряд а) выразит ось p-го порядка составной симметрии, являющуюся одновременно осью симметрии $p/2$ порядка, что видно из того, что этому ряду подчинен ряд $1\ 5\ 9 \ldots$ Для ряда б) это будет справедливо лишь в том случае, если p делится на 4, тогда этот ряд будет выражать ось $p/2$ порядка составной симметрии и одновременно ось симметрии $p/4$ порядка. Совершенно аналогичный результат мы получим для ряда в), если p делится на 6, и т. д.

Но если для ряда б) p не делится на 4, а для ряда в) p не делится на 6, то эти ряды примут форму $11'55'77'$ или даже $11'33'55'$. Здесь эти числа неразделимы, т. е. выра-

Здесь достаточно ограничиться описанием результатов вывода.

Соответственно величине симметрии 48 сфера делится на 48 сферических треугольников (рис. 16). Если мы пронумеруем все эти треугольники, то каждый такой номер как характерный будет выражать определенный элемент симметрии.

Ради простоты мы не будем сейчас принимать во внимание наличие осей симметрии 3-го прядка. Тогда в качестве величины симметрии получим число 16, которое соответствует дитетрагонально-бипирамидальному

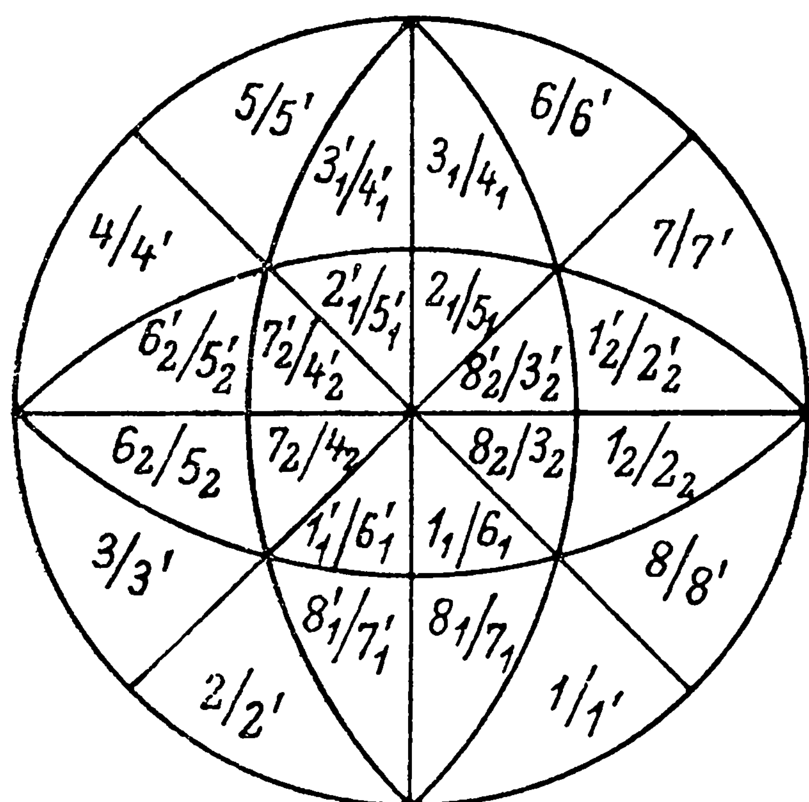


Рис. 16.

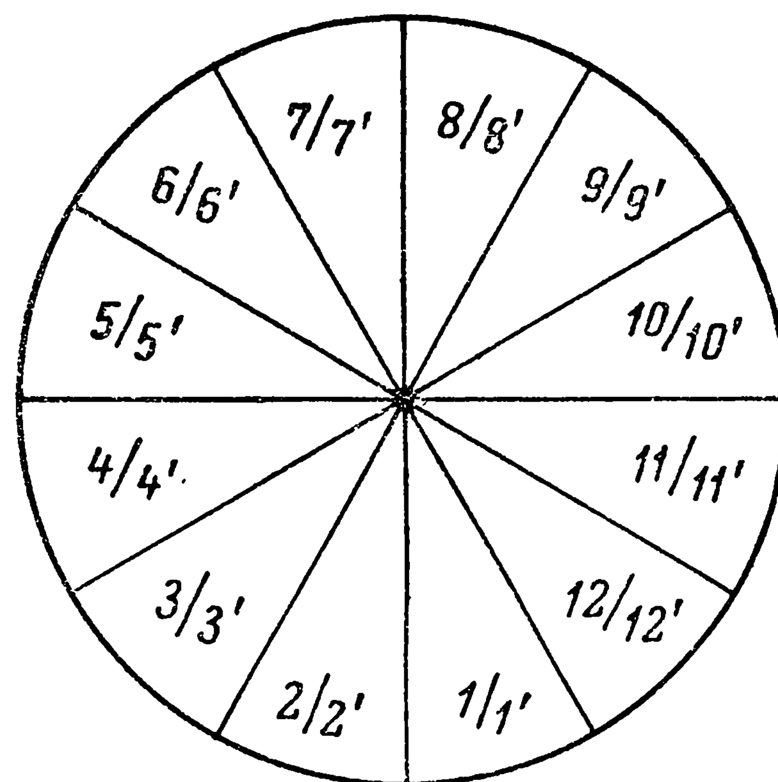


Рис. 17.

виду симметрии. Относящиеся к верхней половине числа 1—8 в качестве выражения элементов симметрии получат то же значение, какое эти числа имели для плоских фигур; 1′ теперь выражает горизонтальную плоскость симметрии , 2′, 4′, 6′ и 8′ — горизонтальные оси симметрии 2-го порядка различного положения, 3′ и 7′ — составную симметрию 4-го порядка и не могут быть отделены друг от друга, так как принадлежат одному и тому же элементу симметрии. Наконец, 5′ выражает центр инверсии.

жают составную симметрию более высокого порядка, среди них выступает также число 1′, которое, взятое отдельно, выражает горизонтальную плоскость симметрии.

Теперь нам совершенно достаточно рассмотреть особый случай, где $p=6$.

В этом случае мы получаем два и только два вида составной симметрии, такие виды, которые задаются рядами а) 13′57′9′ (11′) и б) 11′55′99′.

Первый ряд (а также число 3′, взятое отдельно) выражает ось 6-го порядка 1-го вида составной симметрии.

Элемент симметрии, соответствующий ряду в) (а также число 5′, взятое отдельно), выражает аналогичную ось 2-го вида.

Сюда относится также ряд 17′, но он выражает просто центр инверсии (или ось 2-го порядка составной симметрии).

Имеется всего лишь один вид осей 4-го порядка составной симметрии, который определяется рядом 13′57′.

Теперь введем ось симметрии 3-го порядка определенного положения, и те треугольники, которые образуются вследствие поворота вокруг этой оси в смысле, очевидном из рисунка, начиная от треугольника a, обозначим по порядку a_1 и a_2 ($a_3=a$).

Соответственно величине симметрии 24 тетрапараллелоэдра сфера поделится на 24 сферических треугольника (рис. 17). Треугольники в верхней половине сферы мы пронумеруем просто числами от 1 до 12, как мы делали это для гексагона на плоскости, и тогда придем к тому, что те же характеристические числа выражают те же элементы симметрии. Треугольники нижней половины мы обозначим числами с апострофом. Теперь 1′ означает горизонтальную плоскость симметрии, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′ и 12′ — горизонтальные оси симметрии 2-го порядка различных положений, 3′ и 11′ относятся к оси симметрии 6-го порядка I вида составной симметрии и неотделимы друг от друга, 5′ и 9′ принадлежат к оси 6-го порядка II рода составной симметрии и также неотделимы друг от друга, наконец, 7′ выражает центр инверсии.

11. На основании только что проведенного рассуждения мы получим следующую таблицу видов симметрии простанственных систем [см. с. 46, 47].[7]

12. Для каждого данного вида симметрии и данного направления общего положения (т. е. прямой и плоскости, которая не параллельна и не перпендикулярна ни к одному из элементов симметрии, будь это ось или плоскость симметрии) мы получим некоторое число параллельных одинаковых направлений, равное величине симметрии. Но для частных направлений число равных направлений меньше и возможен даже такой случай, когда это число сократится до единицы. Такие направления мы назовем единичными.

Указанные виды симметрии можно в этом отношении разбить на следующие группы, которые мы будем рассматривать как сингонии.

I. Все направления единичны. Сюда относятся оба первых вида симметрии. Эту сингонию мы назовем триклинной.

II. Есть всего одна плоскость, в которой все направления единичны, и, кроме того, перпендикулярное к этой плоскости направление является единичным. Плоскость сама единична, так же как все перпендикулярные к ней плоскости. Сюда относятся виды симметрии 3,4 и 5.

Эту сингонию мы будем называть моноклинной.

III. Имеются всего три перпендикулярных друг другу единичных направления. Перпендикулярные к ним плоскости также единичны. Сюда относятся виды симметрии 6, 7 и 8.

---

[7] Для наглядности прилагается графическое изображение всех видов симметрии правильного деления пространства (Приложение, табл. II). Такие таблицы прилагаются теперь к элементарным учебникам кристаллографии, так как соответствующие виды симметрии идентичны с кристаллографическими.

Виды симметрии пространственных систем

№	Величина симметрии	Характеристические комплексы чисел для: три-, гекса- и гептапараллелоэдров	Характеристические комплексы чисел для: тетрапараллелоэдров	Уравнения симметрии			Современные обозначения
1	1	1	1	$y=b,$	$z=c,$	$\nu=d$	$C_1 - 1$
2	2	1 5′	1 7′	$y=n^{\pi}b,$	$z=n^{\pi}c,$	$\nu=n^{\pi}d$	$C_i - \bar{1}$
3	2	1 5	1 7	$y=b,$	$z=n^{\nu}c,$	$\nu=n^{\nu}d$	$C_2 - 2$
4	2	1 1′	1 1′	$y=n^{\lambda}b,$	$z=c,$	$\nu=d$	$C_s - m$
5	4	11′55′	11′77′	$y=n^{\lambda}b,$	$z=n^{\nu}c,$	$\nu=n^{\nu}d$	$C_{2h} - 2/m$
6	4	12′56′	12′78′	$y=n^{h}b,$	$z=n^{\nu}c,$	$\nu=n^{h+\nu}d$	$D_2 - 222$
7	4	1256	1278	$y=b,$	$z=n^{\nu}c,$	$\nu=n^{\nu+\varphi}d$	$C_{2v} - mm2$
8	8	11′22′55′66′	11′22′77′88′	$y=n^{h+\lambda}b,$	$z=n^{\nu}c,$	$\nu=n^{h+\nu}d$	$D_{2h} - mmm$
9	4	1357	—	$y=b,$	$y_0=b^4_{\nu},$	$y_1=b^4_{\nu+1}$	$C_4 - 4$
10	8	12345678	—	$y=b,$	$y_0=b^4_{\nu},$	$y_1=b^4_{\nu+n\varphi}$	$C_{4v} - 4mm$
11	4	13′57′	—	$y=n^{\pi}b,$	$y_0=b^4_{\pi},$	$y_1=b^4_{\pi+1}$	$S_4 - \bar{4}$
12	8	11′33′55′77′	—	$y=n^{\lambda}b,$	$y_0=b^4_{\nu},$	$y_1=b^4_{\nu+1}$	$C_{4h} - 4/m$
13	8	12′34′56′78′	—	$y=n^{h}b,$	$y_0=b^4_{\nu},$	$y_1=b^4_{\nu+n^h}$	$D_4 - 422$
14	8	12′3′456′7′8	—	$y=n^{\pi}b,$	$y_0=b^4_{\pi},$	$y_1=b^4_{\pi+n^{\delta}}$	$D_{2d} - \bar{4}2m$
15	16	11′22′33′44′55′66′77′88′	—	$y=n^{\lambda+h}b,$	$y_0=b^4_{\nu},$	$y_1=b^4_{\nu+n^h}$	$D_{4h} - 4/mmm$
16	3	$11_1 1_2$	159	$y=b,$	$y_0=b^3_{\nu},$	$y_1=b^3_{\nu+1}$	$C_3 - 3$
17	6	$11_1 1_2 88_1 8_2$	12569 · 10	$y=b,$	$y_0=b^3_{\nu},$	$y_1=b^3_{\nu+n^{\varphi}}$	$C_{3v} - 3m$
18	6	$11_1 1_2 5'5'_1 5'_2$	13′57′9 · 11′	$y=n^{\alpha}b,$	$y_0=n^{\alpha}b^3_{\nu},$	$y_1=n^{\alpha}b^3_{\nu+1}$	$C_{3i} - \bar{3}$
19	6	$11_1 1_2 4'4'_1 4'_2$	12′56′9 10′	$y=n^{h}b,$	$y_0=b^3_{\nu},$	$y_1=b^3_{\nu+n^h}$	$D_3 - 322$
20	12	$11_1 1_2 4'4'_1 4'_2 5'5'_1 5'_2 88_1 8_2$	12′3′456′7′89 · 10′11′ · 12	$y=n^{\alpha+h}b,$	$y_0=n^{\alpha}b^3_{\nu},$	$y_1=n^{\alpha}b^3_{\nu+n^h}$	$D_{3d} - \bar{3}m$
21	6	—	13579 · 11	$y=b,$	$y_0=b^6_{\nu},$	$y_1=b^6_{\nu+1}$	$C_6 - 6$

Продолжение

№	Величина симметрии	Характеристические комплексы чисел для три-, гекса- и гептапараллелоэдров	Характеристические комплексы чисел для тетрапараллелоэдров	Уравнения симметрии			Современные обозначения
22	12	—	123456789 · 10 · 11 · 12	$y = b$,	$y_0 = b^6_\nu$,	$y_1 = b^6_{\nu+n^\varphi}$	$C_{6\nu}$ — $6mm$
23	6	—	11′55′99′	$y = n^\pi b$,	$y_0 = n^\pi b^6_\pi$,	$y_1 = n^\pi b^6_{\pi+1}$	C_{3h} — $\bar{6}$
24	12	—	11′33′55′77′99′ · 11 · 11′	$y = n^\varkappa b$,	$y_0 = b^6_\nu$,	$y_1 = b^6_{\nu+1}$	C_{6h} — $6/m$
25	12	—	12′34′56′78′9 · 10′ · 11 · 12′	$y = n^h b$,	$y_0 = b^6_\nu$,	$y_1 = b^6_{\nu+n^h}$	D_6 — 622
26	12	—	11′22′55′66′99′ · 10 · 10′	$y = n^{\pi+h} b$,	$y_0 = b^6_\pi$,	$y_1 = b^6_{\pi+n^h}$	D_{3h} — $\bar{6}m2$
27	24	—	123456789 · 10 · 11 · 12 1′2′3′4′5′6′7′8′9′ · 10′ · 11′ · 12′	$y = n^{h+\chi} b$,	$y_0 = b^6_\nu$,	$y_1 = b^6_{\nu+n^h}$	D_{6h} — $6/mmm$
28	12	$11_1 1_2 2' 2'_1 2'_2 5\ 5_1 5_2 6' 6'_1 6'_2 =$ $= (12'56')_3$	—	$x_0 = n^h a^3_0$	$x_1 = n^\nu a^3_{0+1}$,	$x_2 = n^{h+\nu} a^3_{0+2}$	T — 23
29	24	$(11'22'55'66')_3$	—	$x_0 = n^{h+\chi} a^3_0$,	$x_1 = n^\nu a^3_{0+1}$,	$x_2 = n^{h+\nu} a^3_{0+2}$	T_h — $m3$
30	24	$(12'3'456'7'8)_3$	—	$x_0 = n^h a^3_0$,	$x_1 = n^\nu a^3_{0+n^\delta}$,	$x_2 = n^{h+\nu} a^3_{0+2n^\delta}$	T_d — $\bar{4}3m$
31	24	$(12'34'56'78')_3$	—	$x_0 = n^{h+d} a^3_0$,	$x_1 = {}^{d+\nu} a^3_{0+n^d}$,	$x_2 = n^{d+h+\nu} a^3_{0+2n^d}$	O — 432
32	48	$(11'22'33'44'55'66'77'88')_3$	—	$x_0 = n^{h+d+\chi} a^3_0$,	$x_1 = n^{d+n} a^3_{0+n^d}$,	$x_2 = n^{d+h+\nu} a^3_{0+2n^d}$	O_h — $m3m$

Примечание. В последних пяти строчках мы даем сокращенно $(a \ldots c)_3$ вместо $aa_1a_2 \ldots cc_1c_2$.

Эта сингония будет называться ромбической.

IV и V. Есть только одно единичное направление (главная ось); единственная перпендикулярная к этому направлению плоскость тоже единична.

В этом случае мы различаем сингонии, в которых количество одинаковых направлений на единичной плоскости (частных, если такие вообще имеются) равно 2 или 3.

Первую сингонию назовем тетрагональной, последнюю — гексагональной. К первой принадлежат виды симметрии от 9 до 15, к последней — от 16 до 27.[8]

Наконец, VI. Нет ни одного единичного направления. В этом случае есть три особых, перпендикулярных друг к другу направления, которые можно рассматривать как прямые, перпендикулярные к граням куба (кубические оси), и еще четыре других особых направления, которые можно рассматривать как его диагонали. Последним направлениям параллельны оси симметрии 3-го порядка, наличие которых обязательно.

Эта сингония называется кубической. К ней принадлежат виды симметрии 28—32.

Для уравнений симметрии, представленных в таблице 4, в зависимости от вида симметрии в качестве осей координат (сингонии I, II, III) берутся или три единичных направления, или единственное имеющееся единичное направление y и две или три равные прямые, лежащие в особых плоскостях (частные направления, если таковые имеются).

Необходимо подчеркнуть, что для видов симметрии 9—15 элементарный угол осей равен $\frac{\pi}{2}$, для 16—20 — элементарный угол осей равен $\frac{2\pi}{3}$ и, наконец, для видов симметрии 21—27 элементарный угол осей равен $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Оси координат обозначаются по порядку y_0, y_1, y_2 . . .

Наконец, для кубической сингонии в качестве осей координат принимаются три специально упомянутых выше перпендикулярных направления (кубические оси) x_0, x_1, x_2.

Что же касается обозначения периода, значений вводимых параметров симметрии и добавочных координатных осей, то здесь остаются в силе примечания к § 10, I часть.

13. Рассмотрение систем I порядка и теперь ограничится рассмотрением всех видов симметрии, встречающихся в этих системах. Но при

---

[8] Среди видов симметрии гексагональной сингонии виды симметрии № 16—20 отличаются от № 21—27 тем, что в первых всегда можно выбрать наклонное к главной оси направление так, чтобы равнозначные направления образовали трехчленную группу, в последних — шестичленную группу. Это различие ясно видно благодаря тому, что первые виды симметрии объединяют в тригональную, а последние семь — в гексагональную группу гипосингонии. Обе группы изображены в Приложении, табл. II.

этом может случиться, что для одного и того же типа параллелоэдров получится один и тот же вид симметрии различных систем, тогда как направления колонн и плоскости слоев окажутся различно ориентированными по отношению к элементам симметрии.

Для решения этих вопросов необходимо применить учение о видимой симметрии (ср. § 11, часть I) [3]. Но так как исследования такого рода применительно к частностям требуют весьма много места, а лежащий в основе принцип исключительно прост, мы позволим себе здесь снова ограничиться изложением результатов, тем более что они установлены уже давно.[9]

14. Эти системы очень наглядно изображены в Приложении (табл. III). Теперь мы вкратце охарактеризуем их.

1) 1 III, 2) 1 IV, 3) 1 VI и 4) 1 VII — системы, в которых совершенно отсутствуют элементы симметрии (C_1^1 — $P1$).

5) 1 π III, 6) 1 π IV, 7) 1π VI и 8) 1 π VII — системы, в которых есть только центр инверсии (C_i^1 — $P\bar{1}$).

9) 2 III и 10) 2 IV — две системы, в которых имеются только оси симметрии 2-го порядка единственного (параллельного) направления (C_2^1 — $P2$).

11) 3 III, 12) 3 IV, 13) 3 IV′, 14) 3 VI, 15) 3VI′, 16) 3 VII и 17) 3 VII′ — системы, в которых, кроме осей симметрии 2-го порядка, имеются еще винтовые оси. Все эти элементы симметрии параллельны (C_2^3 — $C2$).

18) 1 χIII и 19) 1χIV — две системы, в которых имеются только параллельные плоскости симметрии (C_s^1 — Pm).

20) 1χ′III, 21) 1χ′IV, 22) 1χ′IV′, 23) 1χ′VI, 24) 1χ′VI′, 25) 1χ′VII и 26) 1χ′VII′ — системы, в которых, кроме плоскостей симметрии, имеются еще параллельные им плоскости скольжения (C_s^3 — Cm).

27) 2χIII и 28) 2χIV — две системы, в которых есть только оси симметрии 2-го порядка и перпендикулярные к ним плоскости симметрии (C_{2h}^1 — $P2/m$).

29) 3χIII, 30) 3χIV, 31) 3χIV′, 32) 3χVI, 33) 3χVI′, 34) 3χVII и 35) 3χVII′ — системы, в которых, кроме осей симметрии 2-го порядка, имеются еще параллельные им винтовые оси и, кроме плоскостей симметрии, — параллельные им плоскости скольжения (C_{2h}^3 — $C2/m$).

36) 4 III — система, в которой имеются лишь оси симметрии 2-го порядка, имеющие общие точки пересечения (D_2^1 — $P222$).

37) 5 III, 38) 5 IV — две системы, в которых, кроме осей, имеющихся в только что охарактеризованной системе, есть еще пересекающиеся винтовые оси 2-го порядка, через их точки пересечения проходят перпендикулярные оси симметрии 2-го порядка (D_2^6 — $C222$).

[9] Совокупностть системы параллелоэдров I порядка была намечена сначала в Н. У. Ф., § 84, с. 308, а в У. С. III, табл. IV, она изображена уже очень наглядно и подробно. В Приложении, табл. III, данной работы изображение отличается от предыдущего тем, что параллелоэдры изображены в недеформированной форме. Благодаря этому нагляднее и проще указывается на отношения между системами, а главное достигается наглядность в положении элементов симметрии при помощи соответствующих характеризующих чисел.

39) 6 VI, 40) 6 VII — две системы, в которых, кроме системы осей 4 III, есть еще пересекающаяся система винтовых осей 2-го порядка, имеющих общие точки пересечения (D_2^8 — $I222$).

41) 7 VI, 42) 7 VII — две системы, в которых в каждой плоскости чередуются по одной оси симметрии 2-го порядка и по одной винтовой оси, стоящие в переменном порядке (D_2^7 — $F222$).

43) 2φ III — система, в которой имеются параллельные и одновременно перпендикулярные друг к другу плоскости симметрии (которые, естественно, пересекаются по две в каждой оси симметрии 2-го порядка). Нет ни винтовых осей, ни плоскостей скольжения (C_{2v}^1 — $Pmm2$).

44) 2φ′III, 45) 2 φ′ IV — две системы, в которых, кроме этого, имеются две системы перпендикулярных плоскостей скольжения, но нет винтовых осей (C_{2v}^{11} — $Cmm2$).

46) 3φIII, 47) 3φIV, 48) 3φIV′— три системы, в которых оси симметрии 2-го порядка и винтовые оси только одного направления чередуются в единичных плоскостях. Через винтовые оси проходят плоскости скольжения (C_{2v}^{14} — $Amm2$).

49) 3φ′VI, 50) 3φ′VI′, 51) 3φ′VII — три системы, в которых в единичной плоскости лежат или только винтовые оси, или только оси симметрии. Здесь пересекаются по две плоскости скольжения в одной винтовой оси (C_{2v}^{20} — $Imm2$).

52) 3φ″VI, 53) 3φ″VII, 54) 3φ″VII′ — три системы, в которых в единичных плоскостях чередуются друг с другом оси симметрии и винтовые оси. Здесь плоскости скольжения пересекаются в осях симметрии (C_{2v}^{18} — $Fmm2$).

55) 4χIII — система, в которой имеются только плоскости симметрии трех различных положений, которые, естественно, пересекаются в осях симметрии 2-го порядка, но нет ни плоскостей скольжения, ни винтовых осей (D_{2h}^1 — $Pmmm$).

56) 5χIII, 57) 5χIV — системы, элементы симметрии которых можно вывести из системы 5 путем добавления плоскостей симметрии, проходящих через точки пересечения осей симметрии (D_{2h}^{19} — $Cmmm$).

58) 6χVI, 59) 6χVII — системы, элементы симметрии которых можно вывести из системы 6, как мы их вывели для 5χ из системы 5 (D_{2h}^{25} — $Immm$).

60) 7χVI, 61) 7χVII — системы, элементы симметрии которых можно вывести из системы 7, как было сделано для 5χ из 5 и 6χ из 6 (D_{2h}^{23} — $Fmmm$).

62) 8 III — система, в которой есть только оси симметрии 4-го порядка и равнодействующие оси симметрии 2-го порядка только одного (единичного) направления (C_4^1 — $P4$).

63) 9 VI, 64) 9 VII — две системы, в которых наряду с осями симметрии 4-го порядка и результирующими винтовыми осями 4-го порядка со смещением λ/2 имеются винтовые оси 2-го порядка (C_4^5 — $I4$).

65) 8φIII — система, в которой элементы симметрии можно произвести из элементов симметрии системы 8 путем добавления вертикальных плоскостей симметрии (C_{4v}^1 — $P4mm$).

66) 9φVI, 67) 9φVII — две системы, элементы симметрии которых можно произвести из системы 9 так же, как для системы 8φIII из 8 (C_{4v}^{9} — $I4mm$).

68) 2π III — система, в которой имеются только оси 4-го порядка составной симметрии и равнодействующие оси (S_4^1 — $P\bar{4}$).

69) 3πVI, 70) 3πVII — две системы, в которых равнодействующие оси 4-го порядка составной симметрии имеют другое положение плоскости симметрии, чем у таковых, рассматриваемых в качестве примитивных осей; кроме того, имеются результирующие винтовые оси 2-го порядка (S_4^2 — $I\bar{4}$).

71) 8χIII — система, элементы симметрии которой отличаются от элементов симметрии системы 8 наличием горизонтальных плоскостей симметрии (C_{4h}^1 — $P4/m$).

72) 9χVI, 73) 9χVII — две системы, элементы симметрии которых относятся к элементам симметрии системы 9 совершенно аналогично тому, как они относятся у 8χ и 8 (C_{4h}^5 — $I4/m$).

74) 10 III — система, элементы симметрии которой можно вывести из системы 8 путем добавления горизонтальной оси симметрии 2-го порядка, пересекающей ось симметрии 4-го порядка (D_4^1 — $P422$).

75) 11 VI, 76) 11 VII — две системы, элементы симметрии которых можно вывести из системы 9, как элементы симметрии системы 10 из 8 (D_4^9 — $I422$).

77) 4δIII — система, элементы симметрии которой можно вывести из элементов симметрии системы 4 путем добавления диагональной плоскости симметрии, проходящей через оси симметрии (D_{2d}^1 — $P\bar{4}2m$).

78) 5δIII — система, элементы симметрии которой можно вывести из элементов симметрии системы 5 так же, как элементы симметрии системы 4δIII из 4 (D_{2d}^9 — $I\bar{4}m2$).

79) 6δVI, 80) 6δVII — две системы, элементы симметрии которых можно вывести из системы 6 как элементы симметрии 4δ из 4 и 5δ из 5 (D_{2d}^{11} — $I\bar{4}2m$).

81) 7δVI, 82) 7δVII — две системы, элементы симметрии которых можно вывести из 7 так, как 4δ из 4 и т. д. (D_{2d}^2—$P\bar{4}2c$).

83) 10χIII — система, элементы симметрии которой можно вывести из 10 так же, как 8χ из 8 и т. д. (D_{4h}^1—$P4/mmm$).

84) 11χVI, 85) 11χVII — две системы, элементы симметрии которых можно вывести из 11 так же, как 8χ из 8 и т. д. (D_{4h}^{17}—$I4/mmm$).

86) 12 IV — система, элементами симметрии которой являются только оси симметрии 3-го порядка одного и того же направления (C_3^1—$P3$).

87) 13 III, 88) 13 VI, 89) VII — три системы, среди элементов симметрии которых, кроме осей симметрии 3-го порядка, имеются еще правые и левые винтовые оси того же единственного единичного направления (C_3^4—$R3$).

90) 12φIV — система, элементы симметрии которой можно вывести из элементов симметрии системы 12 посредством добавления к ним вер-

тикальной плоскости симметрии, проходящей через две ближайшие оси симметрии (C_{3v}^1—$P3m1$).

91) 12φ′IV — система, производимая совершенно аналогично, но прибавляемая плоскость симметрии не проходит через две ближайшие оси симметрии (C_{3v}^2—$P31m$).

92) 13φIII, 93) 13φVI, 94) 13φVII — три системы, элементы симметрии которых производятся из 13 совершенно так же, как 12φ из 12 (C_{3v}^5—$R3m$).

95) 12πIV — система, которая относится к 12 точно так же, как 8χ к 8 и т. д. (C_{3h}^1—$P\bar{6}$).

96) 14 IV — система, элементы симметрии которой могут быть произведены из элементов симметрии системы 12 посредством добавления горизонтальной оси симметрии 2-го порядка, не проходящей через две ближайшие оси симметрии (D_3^2—$P321$).

97) 15 IV — система, производимая совершенно аналогично предыдущей, но отличающаяся тем, что добавляемая ось симметрии 2-го порядка проходит через две ближайшие оси симметрии 3-го порядка (D_3^1—$P312$).

98) 16 III, 99) 16 VI, 100) 16 VII — три системы, которые производятся из 13 так же, как предыдущая система из 12 (D_3^7—$R32$).

101) 14πIV производится из 14 IV так же, как 12π из 12 (D_{3h}^3—$P\bar{6}2m$).

102) 15πIV производится аналогично из 15 IV (D_{3h}^1—$P\bar{6}m2$).

103) 17 IV — система с осями симметрии 6-го порядка и равнодействующими осями симметрии 3-го и 2-го порядков единичного направления (C_6^1—$P6$).

104) 17φIV производится из предыдущей так же, как 8φIV из 8 IV (C_{6v}^1—$P6mmm$).

105) 12αIV — система, элементами симметрии которой являются оси 6-го порядка составной симметрии, равнодействующие оси симметрии 3-го порядка и центры инверсии (C_{3i}^1—$P\bar{3}$).

106) 13αIII, 107) 13αVI, 108) 13αVII — три системы, элементами симметрии которых являются оси 6-го порядка составной симметрии с тремя различными положениями плоскостей этой симметрии; кроме того, имеются равнодействующие правые и левые винтовые оси 3-го порядка и центры инверсии различных положений (C_{3i}^2—$R\bar{3}$).

109) 17χIV производится из 17 IV так же, как 12π из 12 (C_{6h}^1—$P6/m$).

110) 18 IV производится из 17 IV путем добавления горизонтальной оси симметрии 2-го порядка, проходящей через ось симметрии 6-го порядка (D_6^1—$P622$).

111) 14αIV производится из 14 путем добавления вертикальных плоскостей симметрии, проходящих через ближайшие оси симметрии 3-го порядка (D_{3d}^3—$P\bar{3}m1$).

112) 15αIV производится из 15 IV путем добавления вертикальных плоскостей симметрии, не проходящих через ближайшие оси симметрии 3-го порядка (D_{3d}^1—$P\bar{3}1m$).

113) 16αIII, 114) 16αVI, 115) 16αVII — три системы, производимые соответственно из 16 III, 16 VI и 16 VII путем добавления плоскостей

симметрии, проходящих через ось симметрии 3-го порядка (D_{3d}^5—$R\bar{3}m$).

116) 18χIV производится из 18 IV так же, как 17χIV из 17 IV и т. д. (D_{6h}^1—$P6/mmm$).

Наконец, все другие системы, принадлежащие кубической сингонии, производятся из предыдущих путем прибавления октаэдрических осей симметрии 3-го порядка:

117) 19 III из 4 III, 118) 20 VII из 6 VII, 119) 21 VI из 7 VI, 120) 19χIII из 4χ, 121) 20χVII из 6χVII, 122) 21χVI из 7χVI, 123) 19δIII из 4δ, 124) 20δVII из 6δVII, 125) 21δVI из 7δVI, 126) 22 III из 10 III, 127) 23 VII из 11 VII, 128) 24 VI из 11 VI, 129) 22χIII из 10χIII, 130) 23χVII из 11χVII и 131) 24χVI из 11χVI. [(T^1 — $P23$), (T^3 — $I23$), (T^2 — $F23$), (T_h^1 — $Pm3$), (T_h^5 — $Im3$), (T_h^3 — $Fm3$), (T_d^1 — $P\bar{4}3m$), (T_d^3 — $I\bar{4}3m$), (T_d^2 — $F\bar{4}3m$), (O^1 — $P432$), (O^5 — $I432$), (O^3 — $F432$), (O_h^1 — $Pm3m$), (O_h^9 — $Im3m$), (O_h^5 — $Fm3m$)].

15. Для того чтобы вообще исчерпывающе изобразить все элементы симметрии для всех систем, необходимо принимать во внимание теоремы § 13 (I часть) со следующими дополнениями:

Дополнение к теореме 1 § 13. Если данный сдвиг l по отношению к данной оси симметрии имеет наклонное направление, компонент которого в направлении оси равен l', то равнодействующая ось p-го порядка является винтовой осью со сдвигом l', l' при этом должно быть обязательно равно $n\frac{\lambda}{p}$, где λ — сдвиг системы в направлении оси, а n — целое число. Если данная ось является винтовой осью со сдвигом L, то результирующая ось является винтовой осью со сдвигом $L+l'$. Если при этом $L+\lambda'=n\lambda$, то эта ось уже не винтовая, а поворотная ось симметрии.[10]

При этом необходимо принимать во внимание, что ось симметрии 4-го порядка является одновременно осью симметрии 2-го порядка, а ось симметрии 6-го порядка — осью симметрии 2-го и 3-го порядков [4]. То же самое аналогично относится к винтовым осям. Из этого следует, что результирующие оси, возникающие из таких осей и данной трансляции, разнообразны и в то же время получают различное положение.

В случае осей составной симметрии результирующие элементы симметрии становятся такими же осями. Если при этом трансляция перпендикулярна к оси, то плоскость составной симметрии сохраняет свое положение, но если направление трансляции по отношению к оси наклонно и имеет в своем направлении компонент l', то результирующая плоскость составной симметрии получает новое положение, она смещается на компонент $l'/2$.

Если даны два произвольных элемента симметрии в произвольном относительном положении, то возникает равнодействующий элемент симметрии, который мы всегда можем определить, если представим себе сперва, что элементы симметрии пересекаются в одной точке, определим

[10] Этот ряд теорем содержится в У. С. III, с. 20—29. Ср. прим. 9.

равнодействующий элемент, а затем примем во внимание не рассматривавшуюся еще трансляцию, которая на основании только что рассмотренной теоремы приведет нас к совершенно определенному элементу симметрии совершенно определенного положения. Винтовые оси и плоскости скольжения при этом всегда следует представлять себе разложенными на компоненты, т. е. как оси симметрии или плоскости симметрии и направления трансляции с совершенно определенными компонентами.

Потребовалось бы очень много места, чтобы применить эту общую теорему ко всем встречающимся случаям особо.

Если мы сравним правильные системы точек, найденные при описании систем I порядка, с правильными системами точек 230 систем, которые ранее были исчерпывающе произведены другим путем, то мы обнаружим, что найденные теперь системы хотя и находятся среди тех, но представлены здесь только 73. Эти системы при их выводе были выделены под названием симмофных [5].

Распределение элементов симметрии всех правильных систем точек представлено очень наглядно графически в Приложении, табл. IV и V. Уравнения симметрии этих систем сопоставлены в табл. 6 этой части.[11]

---

[11] Наглядные графические изображения расположения элементов симметрии правильной системы точек были опубликованы сперва в У. С. III, табл. II и III, а позднее— во введении к «Теории структуры кристаллов» (Z. f. Kryst. u Min., Bd. XXIV, Taf. V u VI). [Русский перевод: Е. С. Федоров. «Симметрия кристаллов», 1949, с. 335—548].

По существу табл. IV и V Приложения теперь следует рассматривать как простую репродукцию, но что касается двойных систем (т. е. систем с элементами прямой симметрии), то они значительно дополнены благодаря добавлению центров инверсии и осей составной симметрии. Напротив, системы кубической сингонии в этом изображении упрощены, так как многие из элементов симметрии, дававшихся ранее, теперь устранены. Даются лишь те из них, которые делают изображение по возможности наглядным. Благодаря этому и аналогия этих систем с системами ромбической и тетрагональной сингонии выступает значительно яснее. Каждой правильной системе точек в этих таблицах отведена отдельная ячейка. Простые системы, содержащие, таким образом, исключительно элементы симметрии, обозначены простой нумерацией (в отличие от асимморфных систем номер заключается в скобках). Все системы, которые производятся из более простой и характерны теми же элементами симметрии, начерчены рядом друг с другом так, чтобы контуры, относящиеся к их ячейкам, были бы у них общими и образовали бы непрерывную цепь. При таком расположении не нужны специальные чертежи элементов симметрии, общие для всех этих систем, так как они видны уже из чертежа относящейся сюда простой системы, во всех других их наличие уже предопределяется.

Значение обозначений сохраняется то же. [Для характеристики винтовых осей Е. С. Федоров применяет термины, имеющие в настоящее время иное значение: полярными винтовыми осями называются оси, отличающиеся знаком вращения (правое—левое): 4_1—4_3, 3_1—3_2, 6_1—6_2—6_4—6_5, к неполярным относятся винтовые оси: 2_1, 4_2, 6_3 (*прим. ред.*)].

⬬ вертикальная ось симметрии 2-го порядка;

⬬ вертикальная винтовая ось 2-го порядка;

▲ вертикальная ось симметрии 3-го порядка;

▲ правая вертикальная винтовая ось 3-го порядка;

16. Все системы I порядка выведены из четырех основных систем 22 III, 23 VII, 24 VI и 18 IV путем замещения их элементов симметрии другими, образующими подчиненные им виды симметрии. При этом некоторые элементы симметрии исчезают, но форма пространственных единиц, положение колонн и слоев остаются неизменными.

левая вертикальная ось 3-го порядка;

вертикальная ось симметрии 4-го порядка;

вертикальная правая винтовая ось 4-го порядка;

вертикальная левая винтовая ось 4-го порядка;

неполярная вертикальная винтовая ось 4-го порядка;

вертикальная ось симметрии 6-го порядка;

вертикальная правая винтовая ось 6-го порядка со сдвигом в длину $\frac{\lambda}{6}$;

вертикальная левая винтовая ось 6-го порядка со сдвигом в длину $\frac{\lambda}{6}$;

вертикальная правая винтовая ось 6-го порядка со сдвигом в длину $\frac{\lambda}{3}$;

вертикальная левая винтовая ось 6-го порядка со сдвигом в длину $\frac{\lambda}{3}$;

вертикальная (неполярная) винтовая ось 6-го порядка со сдвигом в длину $\frac{\lambda}{2}$;

центр инверсии (ось 2-го порядка составной симметрии);

вертикальная ось 4-го порядка составной симметрии;

вертикальная ось 6-го порядка 1-го вида составной симметрии;

вертикальная ось 6-го порядка 2-го вида составной симметрии.

Вертикальные плоскости симметрии показаны при помощи непрерывных прямых линий, так же как и горизонтальные оси симметрии 2-го порядка.

Горизонтальные винтовые оси 2-го порядка и вертикальные плоскости скольжения обозначены пунктирными линиями.

Для вертикальных плоскостей скольжения направление сдвига скольжения показано так: вертикальные плоскости скольжения с вертикальным сдвигом показаны посредством пунктирных линий; если направление сдвига горизонтально, то это показано при помощи стрелок, если это направление наклонно, то это показано посредством поперечных штрихов, например: один поперечный штрих показывает компоненты $\frac{\lambda_0}{2}$, $\frac{\lambda_1}{2}$, иначе даются два поперечных штриха.

Если горизонтальная плоскость симметрии или ось, или плоскость скольжения (центр инверсии и др.) не совпадают с плоскостью рисунка, то расстояние, считая сверху вниз, показывается при помощи цифры; для всех видов сингоний, кроме гексагональной, за единицу принимается $\frac{\lambda}{4}$, а для гексагональной — $\frac{\lambda}{6}$. Вместо 1/2 ставится просто точка. В случае горизонтальных плоскостей симметрии и скольжения, наличие которых видно по присутствию линий, нанесенных у края ячейки, цифра, показывающая расстояние, заключена в скобки.

Для систем кубической сингонии некоторые элементы симметрии, стоящие наклонно, обозначены буквами, значение которых видно из приложенной диаграммы. Наклон-

Здесь следует также принять во внимание уже доказанное положение, что системы в зависимости от их сингонии могут трансформироваться посредством гомогенных деформаций, не теряя присущих им свойств правильных делений пространства.[12]

Приведено доказательство того, что такие системы могут подвергаться двум видам деформаций: а) растяжениям и б) сдвигам. Это как раз те отношения, в каковых находятся между собой кристаллографические фигуры и которые поэтому называются кристаллографической проективностью. Более подробное исследование отношений кристаллографической проективности привело к выводу, что они идентичны с аффинностью Мёбиуса.

Деформации этого вида тесно связаны с сингонией и определяются следующими теоремами.

Теорема 1. В каждом единичном направлении может быть произведено положительное или отрицательное растяжение.

При этом различают ортогональное и косоугольное растяжения в зависимости от того, является ли постоянная плоскость растяжения перпендикулярной или наклонной к направлению растяжения. Наклонное растяжение, естественно, допускается лишь тогда, когда и направление, и плоскость единичны.

Особое примечание. Здесь не учитывается всестороннее растяжение, которое также выступает в качестве особого случая аффинности и собственно представляет собой подобие.

Теорема 2. В качестве плоскостей сдвига и направлений сдвига единичные плоскости или направления могут выступать лишь в том случае, когда в плоскости, перпендикулярной к плоскости сдвига и параллельной направлению сдвига, все направления единичны.

Кроме триклинной сингонии, этот случай возможен и для моноклинной сингонии, если в качестве плоскости сдвига принять плоскость, параллельную особому единичному направлению, и в качестве направления сдвига взять направление, перпендикулярное к нему.

Благодаря этим теоремам вывод правильных делений пространства I порядка приобретает желаемое обобщение.

17. Теперь поставим вопрос: возможны ли такие системы, в которых пространственные единицы ориентированы различно?

И здесь при операции сдвига каких-либо двух единиц системы мы можем самым обычным способом считать, что операция состоит из двух частей: 1) поворота вокруг определенной оси на угол α и 2) простой трансляции.

ные плоскости симметрии и скольжения вообще не показаны; положение же осей симметрии 3-го порядка, напротив, показано полностью.

Эти же обозначения относятся и к табл. I Приложения. Но так как там имеются только вертикальные оси симметрии и вертикальные плоскости симметрии или плоскости скольжения с горизонтальным сдвигом, то следует принимать во внимание лишь часть этих обозначений. Горизонтальное скольжение обозначено тонкими штрихами.

[12] Соответствующие теоремы даны в тех работах, о которых идет речь в примечании 1, с. 9, 10.

К этому еще может добавляться отражение.

Не повторяя рассуждений § 15 части I, мы можем теперь прямо сделать вывод, что первой частью операции является поворот вокруг соответствующей оси симметрии. Вместе с трансляцией он дает винтовую ось как элемент симметрии.[13]

Теперь различаются элементы симметрии различного значения, и прежде всего такие, которые в пространственных единицах являются явными, от тех, которые выступают как элементы симметрии связи.

В качестве явных элементов симметрии могут выступать оси симметрии, плоскости симметрии и элементы сложной симметрии, но ни в коем случае не винтовые оси и не плоскости скольжения.

Те же элементы симметрии, которые выступают как явные, могут выступать и как элементы симметрии связи. Такие элементы симметрии называются периферийными.

18. Так как число возможных ориентаций пространственных единиц является конечным, то среди них должны встречаться и одинаково ориентированные.

Если мы рассмотрим такую пространственную единицу, например нижеследующую, то найдем, что бесконечно конгруентный ряд определяется определенным направлением и отрезком. Из этого следует, что совокупность одинаково ориентированных пространственных единиц образует пространственную решетку. Таким образом, мы и для таких систем можем применять выводы, полученные для систем I порядка. Так, мы находим, что системы с неправильной укладкой единиц уживаются только с приведенными выше 32 видами симметрии, в свою очередь группирующимися в 6 сингоний.

19. Если мы возьмем в какой-нибудь пространственной единице любую точку, находящуюся внутри нее, то, приняв явную величину симметрии за s, мы получим как раз то же число точек, содержащихся внутри. Все движения сдвига системы, которые представлены только элементами симметрии (§ 17), обусловливают бесконечное количество таких групп точек, которые, будучи взятыми вместе, образуют правильную систему точек.

Если бы имелись точки, аналогичные которым точки в своей совокупности образовывали бы пространственную решетку (основные точки), то мы могли бы сделать вывод, что эти точки могут быть взяты за центр параллелоэдра, и тогда пространственную единицу, взятую отдельно или в определенной группе, можно было бы рассматривать (по форме) как первичный или вторичный параллелоэдр. Но так как это не удается сделать для общего случая, то не исключена возможность, что

[13] К сожалению, до сих пор в учении о симметрии такие винтовые оси не отличаются от обычных винтовых осей специальным термином. Это допустимо лишь потому, что в учении о симметрии, как и в учении о правильном делении пространства, следует обращать внимание лишь на такие особые винтовые оси.

они не существуют. Но даже и тогда система может рассматриваться как состоящая только из параллельно ориентированных единиц, однако при этом каждая отдельная пространственная единица не идентична с простым параллелоэдром, а представляет собой некоторое число их, т. е. составной сложный параллелоэдр.

20. Поставленный вопрос можно решить, подвергнув подробному рассмотрению системы, единицы которых являются простыми параллелоэдрами, и таким образом воспроизвести некоторое число правильных систем точек, а затем найденный результат сравнить с другим, полученным путем подробного рассмотрения правильных систем точек. Если оба результата совпадут, то значит и правильные деления пространства рассмотрены полностью. Тем самым будет также доказано, что все правильные системы точек содержат как частный случай главные системы точек. В противном случае имелись бы системы, не содержащие главных точек.

Особое примечание. Для точности следует учитывать следующие соображения.

Так как в каждой из рассматриваемых теперь систем простые (по форме) параллелоэдры ориентированы различно, то они, строго говоря, уже не являются параллелоэдрами. Лишь группы, в которых представлено по одному параллелоэдру каждой ориентации, могут рассматриваться как параллелоэдры в строгом смысле слова. Отдельные пространственные единицы следует рассматривать лишь как суммирующие части параллелоэдра. Такие пространственные фигуры, связанные друг с другом элементами симметрии, называют обычно стереоэдрами. Если они при этом обладают явной симметрией, то они могут быть поделены на еще более мелкие фигуры. Назовем последние простыми стереоэдрами, тогда элементарные пространственные единицы будут сложными составными стереоэдрами.

Для систем, содержащих главные точки, составные стереоэдры по форме будут являться таким образом также параллелоэдрами, а настоящие параллелоэдры — составными параллелоэдрами.

Для систем, не имеющих главных точек, если таковые системы вообще имеются, даже настоящие стереоэдры являются по форме составными параллелоэдрами.

21. В результате всех этих рассмотрений появилась возможность полностью представить все типичные системы с главными точками, если учесть все виды симметрии один за другим и для каждого из них выбрать за исходную точку соответствующие типы параллелоэдра I порядка, но считать при этом, что они имеют минимальную явную симметрию, т. е. все те виды симметрии, которые подчинены симметрии I порядка, а элементы симметрии, остающиеся свободными, рассматривать как элементы симметрии связи.

Величину симметрии также можно разложить на два фактора: величину явной симметрии и величину симметрии связи, произведение которых равно величине симметрии системы.

В случае сложной симметрии величина симметрии в то же время равна числу ориентаций единиц системы. В особых случаях асимметричных единиц это число является одновременно величиной симметрии системы.

22. Каждая такая система может быть, таким образом, точно определена при помощи параллелоэдра и его ориентаций в прилежащих пространственных единицах. Если параллелоэдр асимметричен, то ориентация прилежащих единиц может быть определена путем одной операции, а именно, или а) путем простой трансляции, или б) посредством элемента симметрии связи. Последняя операция указывается одним характерным числом — числом, относящимся к соответствующей граничной плоскости. Указание на простую трансляцию может быть передано просто отсутствием такого характерного числа.

Мы будем группировать системы в системы различных порядков в зависимости от числа различных ориентаций единиц, т. е. по величине симметрии связи.

23. Изображение систем мы будем проводить в последовательности порядков, но в то же время и в порядке параллелоэдров, сперва трипараллелоэдры, затем гексапараллелоэдры и гептапараллелоэдры и, наконец, тетрапараллелоэдры.

Каждый раз ходу исследования следует предпосылать нахождение производных форм. Это нахождение может быть исчерпывающим, если принять в ряде абсолютной удаленности различные единицы как ближайшие соседние, одинаково ориентированные.

Каждое такое предположение дает нам сразу определенный ряд с подчиненным ему направлением и отрезком. Если это направление не единичное, то мы получаем по крайней мере два одинаковых ряда и, таким образом, — плоскую сетку одинаково ориентированных пространственных единиц. Если число таких направлений больше двух, то мы получаем не менее трех определенных рядов, и, таким образом, нами будет определена определенная пространственная решетка.

Для двух единичных направлений, однако, необходим другой прием для того, чтобы определить пространственную решетку. Количество допустимых производных форм при этом увеличится.

Если принятые направления единичны, то область допускаемых предположений становится много шире, а количество производных форм возрастает до трех.

Во всяком случае и здесь действительны оба следующих положения: а) нахождение производных форм относится к проблеме сингонии, а не симметрии[14] и б) производные формы высших видов сингонии для каждого типа параллелоэдров и каждого данного порядкового числа системы стоят под порядковыми номерами низшего вида сингонии.

---

[14] Специально для гексагональной сингонии следует учитывать группы гипосингонии.

Производные формы моноклинной сингонии стоят под производными формами триклинной сингонии, ромбической сингонии — под производными формами моноклинной, тетрагональной и гексагональной — под производными формами ромбической, а кубической — под производными формами тетрагональной и гексагональной сингоний.

24. Если получена производная форма, то этим обусловливаются определенные отношения в ориентации различных единиц. Но при этом следует принимать во внимание и индивидуальные свойства появляющихся элементов симметрии. Эти свойства можно развить на основе теорем § 13 части I и их дополнений в § 15 части II.

Кроме того, следует принимать во внимание, что все системы вообще могут рассматриваться как системы I порядка, но ненасыщенные элементами симметрии. Теоретически рассуждая, всегда есть возможность произвести это насыщение, т. е. явно добавить к единицам элементы симметрии системы, и тогда получится система I порядка. Вследствие этого такие системы называют также симморфными. На этом основании мы можем сделать вывод, что в каждой относящейся сюда системе все виды элементов симметрии могут принимать только то относительное положение, которое им свойственно в системе I порядка. Так, например, винтовая ось 6-го порядка может иметь только центральное положение и при этом исключительно у тетрапараллелоэдров, так как ее можно рассматривать как ось симметрии 6-го порядка (связанную с трансляцией) и ей свойственно определенное положение. Винтовые оси 6-го порядка в симморфных системах полностью отсутствуют.

Оси симметрии 4-го и 3-го порядков могут выступать, кроме явной формы, и как периферийные, но первая только в трипараллелоэдрах, а последняя — в тетрапараллелоэдрах. В гексапараллелоэдрах и гептапараллелоэдрах 4-ая ось может встретиться исключительно в форме винтовой оси (со сдвигом $\lambda/2$ и тем более со сдвигом $\lambda/4$); то же относится и к оси 2-го порядка и т. д.

Так как перечисление возможных положений отдельных элементов симметрии в параллелоэдрах всякого рода требует много места, то здесь мы позволили себе обратить внимание лишь на то, что в каждом отдельном случае этим нельзя пренебрегать, так как положения всех элементов симметрии в симморфных системах учесть легко.[15]

Особый случай, если в одной точке — центре симметрии — пересекаются по крайней мере два элемента симметрии. Это касается всех видов симметрии, кроме 1-й, 3-й, 4-й, 9-й, 10-й, 16-й, 17-й, 21-й и 22-й. Центры симметрии проявляются как периферийные, если ни один из пересекающихся в них явных элементов симметрии не проникает внутрь пространственной единицы (и тогда обязательно проходит через центр первичного параллелоэдра), если же хотя бы один из эле-

[15] Этот вопрос подробно освещен в 1-й части «Теории кристаллической структуры» (Z. Krist., Bd 25, S. 150).

ментов проникает внутрь единицы, то мы имеем полупериферийные центры симметрии.

25. Среди элементов симметрии связи, кроме периферийных, следует различать еще центральные и секущие.

Центральными элементами симметрии связи являются те, которые проходят через центр первичного параллелоэдра. К ним относятся винтовые оси и плоскости скольжения.

Эти же элементы симметрии могут появляться и как секущие, если они не проходят через центр, но соответствующие характеризующие их числа располагаются как таковые на гранях.

Наличие таких элементов симметрии связано с особыми отношениями пространственных единиц.

Центральный элемент симметрии связи, определяемый двумя характеризующими его числами на противоположных гранях, точно обусловливает колонну II порядка. Эти колонны всегда являются фанеротипными, так как противолежащие характеризующие числа всегда одни и те же. Те же самые элементы симметрии могут выступать в колоннах как криптотипные, когда подчиненные этим колоннам характеризующие числа различны, т. е. выражают разные виды элементов симметрии, но результирующий элемент симметрии является центральным и не показан числами.

Пересекающиеся элементы симметрии точно определяют ряд I порядка, если граничные плоскости не являются прилежащими; если же они являются прилежащими, то такие элементы симметрии определяют колонну I порядка, которая не принадлежит к данной пространственной единице.

Возможность существования таких элементов симметрии обусловлена данной производной формой, и эти элементы симметрии следует принимать во внимание в первую очередь. Существование пересекающихся элементов симметрии обусловливается равенством двух характеризующих чисел и относительным положением соответствующих граничных плоскостей. Если ни одно из двух характеризующих чисел не равно, то все рассматриваемые элементы симметрии исключаются, и тогда остается принять во внимание лишь возможность наличия периферийных элементов.

26. Теперь обратимся к задаче полного нахождения систем высшего порядка. Такая система будет точно и строго определена, если мы имеем параллелоэдр со всеми характеризующими числами, соответствующими его граничным плоскостям. Однако все эти числа не являются независимыми друг от друга и в связи с этим в первую очередь возникает вопрос, какие числа необходимы и достаточны для определения системы.

Представим себе систему, поделенную только на параллельные и прилежащие плоские сетки. Сразу становится очевидным, что достаточно определения ориентации единиц, прилежащих к данной единице и одновременно смежных с обеими плоскими сетками.

Вследствие трехмерного измерения пространства необходимо определение по крайней мере трех колонн.

Из этого следует, что стоящая перед нами задача будет решена, если мы поделим систему на такие плоские сетки, три единицы которых будут прилежащими к данным.

Обоим поставленным условиям соответствуют плоскости, обозначенные на рис. 12—15 (с. 42) буквами a, b, c; при этом имеются в виду и противолежащие a', b', c'.

Таким образом, остается характеризовать все системы так, чтобы $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ сделать равными определенным числам симметрии.

Сразу же следует подчеркнуть, что для гексапараллелоэдра мы имеем особый случай, когда для точного определения системы недостаточно наличия элементов симметрии связи для a, b, c. Это как раз тот случай, когда совершенно недостаточно задания двух элементов, например b и c (системы IV и VIII порядков), но при этом ориентация единиц b и c такова, что есть противоположный элемент симметрии связи 5, положение которого по отношению к грани a является периферийным. Следовательно, $a=5$, и система остается неопределенной. Для этого особого случая мы в виде исключения можем выбрать другую грань, например d.

27. Возможны такие системы, которые являются фанеротипными для всех колонн. Такие системы мы будем называть фанеротипными в противоположность тем, в которых встречаются и криптотипные колонны и которые поэтому мы назовем криптотипными.

Таким образом ясно, что для определения фанеротипных систем достаточно лишь положить числа a, b, c равными определенным числам симметрии, но для криптотипных систем необходимо принять во внимание пары чисел $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ целиком или частично. Благодаря этому сразу же станет ясно, какие из трех колонн, определяющих систему, являются фанеротипными.

28. Если имеется пара граней, характеристическое число которой равно 1 (оно не ставится) и указывает оно на трансляцию как на операцию совмещения, то тем самым определяется колонна I порядка, и тогда вся система может рассматриваться как состоящая исключительно из таких параллельных колонн. Такие системы мы будем называть системами колонн и в их символ добавлять букву c. Подобные системы, конечно, возможны только в том случае, если колонна имеет единичное направление.

Если имеется по меньшей мере две пары таких граней, то возникают две колонны I порядка, но различного направления, и они определяют слой I порядка. Такие системы мы будем называть слоевыми и придадим их символу букву s. Системы s возможны лишь в том случае, если плоскость слоя единична.

Наконец, может встретиться такой случай, когда имеются три пары таких граней, и, несмотря на это, система не является системой I порядка. Последнее возможно только для систем гептапараллелоэдров и только тогда, когда посредством данных плоскостей пространственная единица является смежной с единицами слоя, но сам слой не является

непосредственно прилежащим. В первичном гептапараллелоэдре такими плоскостями являются четырехугольники. В этом случае система представляет собой две стоящие друг в друге пространственные решетки, пространственные единицы которых ориентированы различно. Таким образом, такие системы обязательно являются системами II порядка. Мы будем называть их решетчатыми системами и придадим их символу букву g.

29. Само собой понятно, что нахождение фанеротипных систем много проще, чем криптотипных.

Для последних необходимо принимать во внимание следующие теоремы.

Теорема 1. Если винтовая ось 2-го порядка единичного направления или единичная плоскость скольжения с единичным направлением скольжения выступает центрально в качестве элемента симметрии связи, то перпендикулярные колонны будут самое большее II порядка, а нормальные к плоскости — I порядка.

Эта теорема может быть доказана совершенно аналогично теореме § 25 части I, для чего следует представить себе одну из данных пространственных единиц A и подвергнуть ее операции совмещения, соответствующей данному элементу симметрии, расположенному центрально. Тогда мы получим другую единицу B. Подвергнем ее аналогичной операции, но относительно выступающего в ней центрального элемента симметрии и притом в противоположном направлении. Так мы придем к новой единице C, которая ориентирована одинаково с A и лежит с ней в одной и той же колонне и в том же ряду. Колонна будет самое большое II порядка, а ряд — I порядка.

Теорема, естественно, справедлива в том случае, если элемент симметрии является криптотипным, так же как и в том случае, если элемент симметрии фанеротипный (в последнем случае он является центральным элементом симметрии связи). Но так как ось симметрии 2-го порядка одновременно является винтовой осью, а плоскость симметрии — одновременно и плоскостью скольжения, то эта теорема справедлива и тогда, когда эти элементы симметрии выступают явно [6].

Эта теорема справедлива равным образом и для поворотных винтовых осей симметрии 4-го и 6-го порядков, так как они являются одновременно и осями 2-го порядка.

Теорема 2. Если центрально выступает полярная (т. е. правая или левая) ось 4-го порядка и при этом все пространственные единицы получают винтовые оси одного и того же порядка, то перпендикулярные им слои будут не более II порядка, а плоские сетки — I порядка. Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству предыдущей.

Но так как ось симметрии 4-го порядка является одновременно винтовой осью со сдвигом $\lambda/2$, а последнюю следует рассматривать в то же время как полярную ось со сдвигом $\lambda/4$, то теорема справедлива также и для этих осей.

При такой точке зрения следует, конечно, для оси симметрии 4-го порядка принимать операцию сдвига в направлении трансляции в 4 раза меньше, а для винтовой оси 4-го порядка со сдвигом $\lambda/2$ — в 2 раза меньше, чем величину трансляции в направлении полярной винтовой оси.

Если винтовое вращение данной единицы, прилежащей к пространственной единице *A*, прямо противоположно, то после выполнения элементарной операции совмещения вокруг центральной винтовой оси получаем некоторую единицу *B*, которая обладает с *A* тем же винтовым вращением и, таким образом, имеет с данной противоположное положение. Отсюда следует, что единица *C*, получающаяся из *B* путем вращения и сдвига вокруг центральной оси в противоположном направлении, имеет не ту ориентацию, что *A*, но может быть получена из нее путем поворота вокруг оси 2-го порядка.

30. Специально для криптотипных колонн справедливы еще следующие теоремы.

Если параллельная криптотипной колонне винтовая ось 2-го порядка единичного направления или единичная плоскость скольжения с единичным направлением скольжения выступает центрально или криптотипно, то ни одна из данных прилежащих единиц не может иметь одинаковой ориентации с прилежащими единицами, принадлежащими колонне. Исключение составляет случай моноклинной сингонии с криптотипной плоскостью скольжения в отношении единиц, для которых эта плоскость является с данными общей.

Лишь в этом исключительном случае мы получаем на основе противоположного предположения единичный ряд I порядка. Для всех остальных случаев ряд не является единичным; таким образом, во всех случаях возникает плоская сетка I порядка, и этой сетке должны соответствовать и обе относящиеся к колонне и прилежащие к данной единицы; тем самым колонна никак не может быть криптотипной.

Для прилежащих пространственных единиц, которые вместе с данными относятся к колонне, перпендикулярной к криптотипной, вполне допустима одинаковая ориентация с единицей, принадлежащей к криптотипной колонне, но не являющейся смежной с данной. Эта ориентация будет определяться поворотом вокруг оси 2-го порядка или зеркальным отражением в плоскости симметрии.

Совершенно аналогичная теорема справедлива для криптотипных колонн, в которых центрально или криптотипно выступает полярная (т. е. правая или левая) ось 4-го порядка. Прилежащие к данной единице пространственные единицы, относящиеся к колоннам, перпендикулярным к криптотипной, не могут иметь одинаковой ориентации с единицами, относящимися к криптотипной колонне, за исключением тех, ориентация которых возникает из данной путем поворота вокруг оси 2-го порядка.

31. Если пространственные единицы явно симметричны, то необходимо рассмотреть следующие случаи.

а) Явная симметрия подчинена симметрии связи.

Если это так, то порядок по сравнению с порядком систем, в которых симметрия связи та же, но единицы асимметричны, будет меньше во столько раз, во сколько раз в величине симметрии содержится меньше единиц. Этим упрощается нахождение таких систем.

б) Элементы явной симметрии не зависят от элементов симметрии связи. В этом случае и при этой же симметрии связи порядок системы сохраняется. Подобные системы можно также выводить из соответствующих асимметричных путем простого включения нужных элементов симметрии.

Но при этом включении всегда следует учитывать, допускает ли положение элемента симметрии связи эту операцию.

32. Специально в системах гексагональной сингонии в качестве элемента симметрии связи в слоях, перпендикулярных главной оси, выступает ось симметрии 3-го порядка, возможная только в системах тетрапараллелоэдров. Если ввести в качестве элемента симметрии связи ось симметрии 2-го порядка, то слои будут II порядка, что, однако, невозможно (§ 33, часть I), так как соответственно производной форме действительны только слои III и IV порядков. Если к периферийной оси симметрии 3-го порядка добавить единичную плоскость симметрии, то она тем самым вводится явно, а производная форма и, следовательно, порядок системы остаются без изменения. Таким образом, ось 6-го порядка составной симметрии I вида не может выступать в качестве элемента симметрии связи слоев.

Но так как центр инверсии оси симметрии 3-го порядка не может быть введен, то и ось 6-го порядка составной симметрии I вида не может проявляться в качестве элемента симметрии связи.

В результате того, что ось симметрии 6-го порядка также не может выступать в качестве элемента симметрии связи слоев, можно сделать вывод, что все системы видов симметрии 18, 20, 21, 22, 24, 25 и 27 (т. е. системы, в которых выступают оси сдвига 6-го порядка или оси 6-го порядка составной симметрии I вида) являются системами слоев.

33. Теперь проследим производные систем II и высших порядков.

Это исследование начинается с систем трипараллелоэдров, за ними следуют гексапараллелоэдры и гептапараллелоэдры, а затем тетрапараллелоэдры. Будем придерживаться очередности порядков, для каждого порядка — ряд симметрии и для каждого вида симметрии — ряд соответствующего типа I порядка.

Результаты помещены в табл. 5, содержащей 8 столбцов. В 1-м столбце дается производная форма, во 2-м — вид симметрии, в 3-м — величина симметрии, в 4-м указаны номера системы для каждого вида симметрии отдельно, в 5-м — тип систем I порядка, столбцы 6 и 7 содержат характерные числа симметрии, первое — для явной симметрии, второе — для симметрии связи, наконец, 8-й столбец содержит символ найденной системы.

34. Совершенно очевидно, что для систем триклинной сингонии допустимы только три производные формы, а именно *a*11, 1*aa* и *aaa*, т. е. такие, в которых связаны трансляцией две пары граней, одна пара граней, а в третьей форме нет пар граней, связанных трансляцией. Этим производным формам соответствует система слоя, система колонн и индивидуальная система. Итак, в триклинной сингонии имеются только три системы, соответствующие этим формам.

35. Для моноклинной сингонии возможны те же производные формы. Но на основе принципов учения о видимой симметрии для типов 2 III, 1χIII и 2χIII возможны по два варианта первой и второй форм, т. е. всего по пять систем, тогда как для типов 3 III, 1χIII и 3χIII — только по одному варианту каждой формы, т. е. только по три системы точек.

Для 5-го вида симметрии, однако, следует принимать во внимание еще подчиненные виды симметрии, а именно 2-й, 3-й и 4-й, вследствие чего для этого вида симметрии мы получаем $3\times5+3\times3=24$ системы.

36. Для 6-го и других видов симметрии ромбической сингонии действительны те же производные формы, но для некоторых типов, с точки зрения видимой симметрии, необходимо брать большее количество вариантов. Для типа 2φIII с явной симметрией 12 следует различать теперь 1*a*1 от 11*a* и *aa*1 от *a*1*a*. Благодаря этому число вариантов увеличивается до 7. Необходимо принимать во внимание, что один и тот же явный элемент симметрии может вводиться различно. Для типа 5 III оси симметрии 4′ и 8′ равноценны между собой. Для типа 3φIII плоскости симметрии 1′ и 4 не равноценны.

Здесь мы имеем дело с особым случаем, когда две различные системы принадлежат одному и тому же виду симметрии, одному и тому же основному типу 4III, к ним относится собственно один и тот же символ 5 $(2\ \mathrm{III}_4)^c$, так как обе системы точек, лежащие в основе, являются идентичными, а именно соответствуют системе точек 5 (табл. 5). Но эти системы должны быть различными, так как их характеризуют различные варианты производной формы — 1*aa* и *aa*1. Различие этих вариантов видно из положения 5 явной симметрии. Оно выражается в том, что в первом особая ось симметрии системы (которая не пересекается с другими) выступает явно, тогда как во втором та же ось является периферийной (подчинена грани *в*). Для того чтобы выразить это различие, символу второй системы придается апостроф.

37. Для систем тетрагональной сингонии эти же три производные формы сохраняются, но вследствие наличия оси 4-го порядка они выступают только в трех типичных вариантах — *a*11, 1*aa* и *aaa*.

Для полного изображения систем остается принять во внимание еще основные типы и подчиненные виды симметрии. С точки зрения учения о видимой симметрии следует отличать друг от друга такие явные виды симметрии, как 1-й, 2-й, 5-й и 6-й и 1-й, 4-й, 5-й и 8-й и т. п.

38. Для систем гексагональной сингонии действительна лишь одна производная форма *aaa*.

Здесь также представлены не все виды симметрии: а) так как основные типы имеются вообще не для всех видов симметрии, а только для видов симметрии тригональной гипосингонии, б) для 16-го вида симметрии отсутствуют относящиеся к нему системы, так как среди элементов симметрии нет элементов 2-го порядка. По этой причине ось симметрии 3-го порядка должна выступать явно и благодаря этому можно определить подчиненные виды симметрии.

39. Для систем кубической сингонии также справедлива только производная форма *aaa*; и здесь ось симметрии 3-го порядка должна выступать явно. Вследствие этого характеризующие числа симметрии связи (как и явные) можно показывать короче, как было указано в § 11.

40. Системы III порядка возможны лишь в том случае, если имеются оси 3-го порядка. Но так как у трипараллелоэдров оси симметрии 3-го порядка никак не могут выступать в качестве элементов симметрии связи, то остаются допустимыми только полярные винтовые оси 3-го порядка. Таким образом, в одной и той же системе никогда не могут присутствовать полярные оси противоположного направления вращения, так как в силу теорем § 15 равнодействующие элементы симметрии были бы осями симметрии 3-го порядка, а они здесь исключаются.

Единственно возможной здесь производной формой является $\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$, где a и a' — различные числа. Числители этих выражений обязательно равны, согласно предположению о том, что имеются оси сдвига 3-го порядка. Такие системы могут, следовательно, состоять только из параллельных плоских сеток I порядка, которые перпендикулярны к осям. Из этого следует, что для кубической сингонии такие системы невозможны. Таким образом, остается принять во внимание только гексагональную сингонию, т. е. виды симметрии тригональной гипосингонии.

16-й вид симметрии явно возможен, так как здесь в качестве элементов симметрии связи выступают соответственно правые или левые оси 3-го порядка. Положение этих осей можно легко определить на основании дополнительной теоремы § 15, если представить себе сперва явную ось симметрии 3-го порядка, а затем найти, согласно теореме, равнодействующую ось соответствующего элементарного правого или левого вращения с трансляцией. Оси с противоположным значением вращения, таким образом, находятся в разных положениях. Точку пересечения осей с плоскостями *a* и *c* (рис. 18) находят, соединив прямой на п р а в о м среднем ребре плоскости *a* среднюю точку *e* с вершинами *A*, и тогда точки пересечения *d* и *d'* этих прямых *Ae* с горизонтальными диагоналями плоскостей определят положение правой винтовой оси 3-го порядка. Для левой оси действительно аналогичное построение с той лишь разницей, что точка *e* избирается на левом среднем ребре (рис. 19).

Из других видов симметрии допустимы только такие, системы которых могут быть выведены из только что описанных двух систем путем добавления явных элементов симметрии (§ 31). Но так как в этих системах участвуют только полярные оси с определенным направлением вращения,

добавление элементов прямой симметрии (плоскости симметрии, плоскости скольжения, составная симметрия) исключается.

Остается возможным лишь добавление осей симметрги 2-го порядка, что соответствует 19-му виду симметрии. Применение рассуждений § 31 может привести к прямому доказательству возможности таких двух систем. Все другие предположения невозможны.

41. Системы IV порядка возможны лишь в том случае, если величина симметрии может быть выражена посредством числа $4n$, где n — целое число, включая единицу. Наинизшая сингония, относящаяся сюда, — моноклинная, 5-й вид симметрии.

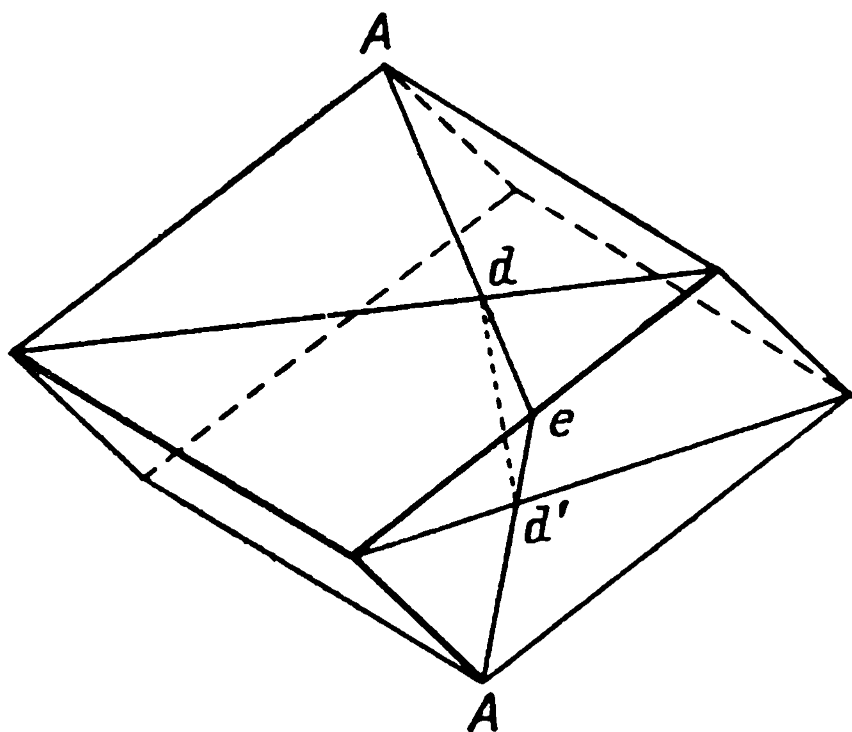


Рис. 18.

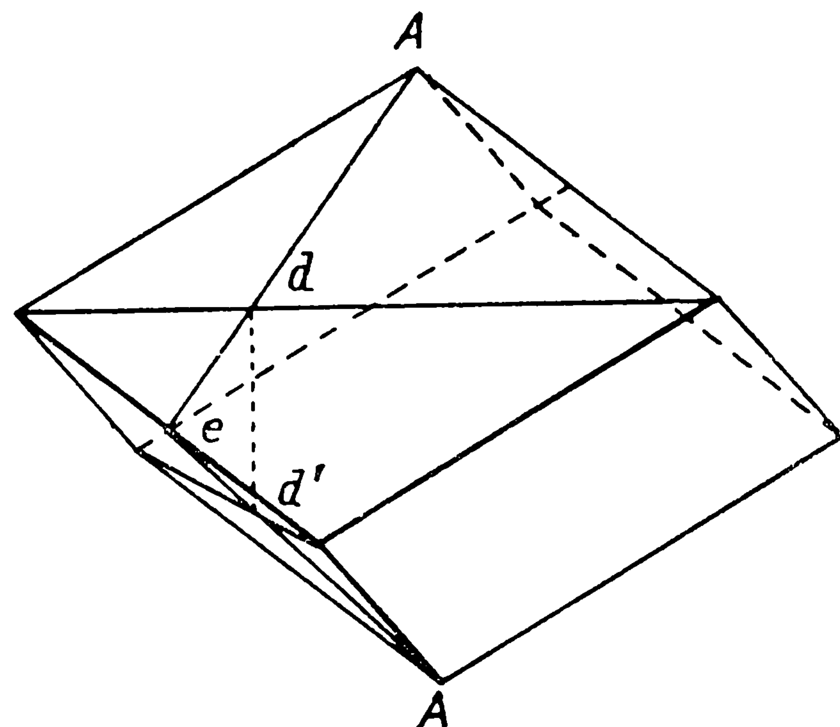


Рис. 19.

К ним относятся следующие производные формы: для фанеротипной системы мы получаем 1 *ав* (или *ав*1 и т. д.), где *а* и *в* — различные числа, *авв* (или *аав* и т. д.) и, наконец, *авс*, где *авс* — три числа, хотя и различные, но находящиеся в зависимости друг от друга, так как иначе они все относились бы к элементам симметрии 2-го порядка и мы получили бы систему VIII порядка. Для системы IV порядка, например, элемент симметрии, соответствующий *а*, по отношению к элементам симметрии, выраженным через *в* и *с*, должен быть равнодействующим.

Для криптотипных систем мы получаем $\frac{a}{a'}$; 1; 1, $\frac{a}{a'}$; $\frac{a}{a'}$; 1, $\frac{a}{a'}$; $\frac{a}{a'}$; $\frac{a}{a'}$, $\frac{a}{a'}$; b; 1, $\frac{a}{a'}$; b; b, $\frac{a}{a'}$, a; b, $\frac{a}{a'}$; $\frac{a}{a'}$; b, где между тремя числами a, a' и b всегда существует указанное выше отношение.

Сюда относятся только два основных типа 2χIII и 3χIII.

С точки зрения видимой симметрии в первом типе отличают $1ab$ от $ab1$, abb от aab, $\frac{a}{a'}11$ от $1\frac{b}{b'}1$, $\frac{a}{a'}b1$ от $1\frac{b}{b'}c$ и от $a\frac{b}{b'}1$, $\frac{a}{a'}bb$ от $a\frac{b}{b'}a$, но производные формы $\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}1$ и $\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}b$ для них невозможны (теорема 1, § 29).

Для второго типа невозможны производные формы $1ab$, abc, $\frac{a}{a'}b1$, $a\frac{b}{b'}$, b, так как направления двух колонн не являются единичными, в частности две последние производные формы — вследствие того, что из трех имеющихся элементов симметрии два выступают как видимые элементы симметрии связи и тем самым обусловливают равенство двух характеристических чисел.

Принимая все это во внимание, мы хотим вывести для каждой производной формы соответствующие характеристические числа.

То, что в прошлых системах встречалось в виде исключения, и именно появление систем с одинаковыми символами, — здесь обычное явление. Но каждый раз мы будем доказывать различие систем различием вариантов производных форм.

42. Для систем ромбической сингонии действительны те же производные формы, так что при их нахождении следует принимать во внимание только соответствующие элементы симметрии связи и не упускать из вида принцип видимой симметрии.

Специально для 8-го вида симметрии следует еще ввести явную симметрию подчиненных видов симметрии. С введением центра инверсии криптотипные производные формы отпадают сами собой.

43. При отыскании систем тетрагональной сингонии производные формы те же, но здесь имеется особое обстоятельство: характеристические числа 3 и 7, так же как $3'$ и $7'$, всегда взаимосвязаны, так как уже одно из этих чисел определяет положение элемента симметрии 4-го порядка. Если $a=3$, то $a'=7$, если $b=3$, то $c=7$, если $b=3'$, то $c=7'$, если $a=3'$, то числа $3'$ и $7'$ должны встречаться вместе, и 5 тогда выступает явно.

Если принять во внимание, что для систем IV порядка все характеристические числа симметрии разделяются на четыре группы, одна из которых выражает явную симметрию и, таким образом, в нашем распоряжении остаются только три группы, то легко найти, что две из них, не содержащие ни 3, 7, ни $3'$, $7'$, могут возникнут лишь тогда, когда эти числа содержатся вместе, в одной группе. Последнее может быть лишь в том случае, если 5 выступает явно.

Помимо сказанного, возможны лишь два предположения: а) или $a=3$ (или 7), тогда мы имеем систему с исключительно полярными осями в центральном положении, и необходимо воспользоваться теоремами § 29, б) или $b=3$, $c=7$ (также $b=3'$, $c=7'$), тогда мы имеем определенный слой IV порядка, и выбор других элементов симметрии связи ограничен лишь тем, что соответствующие им операции должны привести периферические оси симметрии 4-го порядка к совмещению.

Если оба числа встречаются вместе, то мы получаем для систем аналогичные ограничения. Если этих чисел нет, то мы имеем случай периферийной винтовой оси 4-го порядка со сдвигом $\lambda/2$ и опять получаем аналогичные ограничения в выборе элементов симметрии.

Для относящихся сюда систем исключается понятие криптотипных колонн, параллельных единичной плоскости, так как при этом мы получили бы слои VIII порядка, что неприемлемо для этой системы.

44. Для системы гексагональной сингонии следует принять ось симметрии 3-го порядка за явную. Величина симметрии тогда будет содержать по меньшей мере 12, что может быть только у 20-го вида симметрии (среди систем тригональной гипосингонии). Единственная допустимая производная форма — $\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$. Соответственно этому может быть найдена лишь одна единственная система.

Та же система может быть выведена из моноклинной (5-й вид симметрии) $3\chi 1\ (1\ \mathrm{III}_3)'_{4'5'}$ путем введения явной оси симметрии 3-го порядка.

45. Так как и в системах кубической сингонии ось симметрии 3-го порядка обязательно выступает явно, то их можно вывести из тех систем, которым свойственна единственная допустимая здесь производная форма aa_1a_2 (или abc) и вид симметрии которых получается благодаря удалению оси симметрии 3-го порядка.

Таким образом, для 28-го вида симметрии следует принимать во внимание системы 8, 9 и 10 6-го вида симметрии, для 29-го вида симметрии — системы 8, 9 и 10 8-го вида симметрии, для 30-го вида симметрии — системы 11 и 12 14-го вида симметрии, для 31-го вида симметрии — 15 и 16 13-го вида симметрии и для 32-го вида — системы 9 и 10 15-го вида симметрии и произвести испытания, возможно ли явное введение оси симметрии 3-го порядка.

Теперь легко установить, что это действительно справедливо для систем $6(1\mathrm{III}_4)$, $5(1\mathrm{III}_4)$, $6\chi(1\pi\mathrm{III}_4)$, $3(\chi 3)(1\pi\mathrm{III}_4)$, $6\delta(1\chi'\mathrm{III})'$, $11(3\mathrm{III})$, $11\chi 1(3\chi\mathrm{III})$. Таким образом, мы получаем установленные системы.

46. Очевидно, что системы VI порядка возможны лишь тогда, когда ось 3-го порядка выступает не явно, а как элемент симметрии связи, т. е. в форме полярных винтовых осей. Однако прямая симметрия при этом исключается. Следовательно, такие системы допустимы для единственного вида симметрии — 19-го. Но так как для гексагональной сингонии вообще допустима только производная форма $\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$, то винтовые оси могут проявляться не в форме секущих элементов симметрии, а только в скрытой форме. В качестве элементов симметрии связи теперь появляются оси 2-го порядка, частично как периферийные, частично как секущие. На основании этих рассуждений находят заданные системы.

47. Для систем VIII порядка величина симметрии должна составлять по крайней мере 8 или быть числом, кратным 8. Наинизшей относящейся сюда сингонией является ромбическая, а именно 8-й вид симметрии. Единственной производной формой фанеротипных систем является abc, где

abc — характеристические числа, которые в совокупности выражают независимые элементы симметрии, т. е. ни один из элементов симметрии, выраженный одним из этих чисел, не может быть равнодействующим двух других. Из двух относящихся сюда основных типов 4χIII и 5χIII это относится только к первому, так как у второго нет таких трех элементов симметрии, которые одновременно различны и ни один из них в то же время не является секущим. Последнее справедливо для особого слоя, колонны которого не единичны; для них, как элементов симметрии связи, могут удовлетворять этому условию лишь $5'$ и 5 как периферийные и $1'$ как центральный. Исключение двух из указанных элементов исключило бы любой независимый третий элемент симметрии связи. Следовательно, типу 4χIII соответствуют только криптотипные системы.

Для единичной криптотипной колонны, например для колонны $\frac{a}{a'}$, исключаются элементы симметрии 5, 2 и 6 как центральные элементы симметрии связи (эти элементы выступают как центральные только в скрытой форме, т. е. криптотипно); таким образом, допустимы только комбинации $\frac{2'}{6'}\frac{5'}{1'}\frac{5'}{2'}\frac{1'}{2'}$; во всех выступает центрально криптотипно один элемент симметрии (винтовая ось или плоскость скольжения), и тогда, согласно теореме 1 § 29, остальные колонны являются фанеротипными.

Но если одна неединичная колонна является криптотипной, то и обе эквивалентные колонны являются криптотипными, это особенно касается типа 5χIII. Но так как здесь обязательно встречаются секущие элементы симметрии связи, то относящиеся к противоположным граням будут обязательно центральными, т. е. $5'$ или 5.

Для систем 1-го вида мы получаем в качестве производных форм $\frac{a}{a'}b1$, где b не зависит от a и a', или $\frac{a}{a'}bc$, где c не должно не зависеть от a, a' и b (что, впрочем, невозможно) и даже может быть равно b, но ни в коем случае не должно быть равно a или a' (§ 30).

Для систем 2-го вида мы получаем производную форму $a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$, где a не зависит от b и b'.

При применении данных принципов у нас возникает особая трудность при нахождении системы abc, если принимать во внимание требования, поставленные с точки зрения видимой симметрии, так как все три колонны в этом отношении равноценны. Эти трудности устраняются путем применения особого порядка отыскания систем. Сперва в качестве элементов симметрии связи принимают все плоскости симметрии (1), затем следуют системы только с двумя периферийными плоскостями симметрии (2, 3), в дальнейшем — системы с одной плоскостью симметрии (4, 5, 6, 7, 8 и 9) и, наконец, — системы с центром инверсии, но без плоскостей симметрии (10, 11, 12, 13). Далее вводятся плоскости скольжения, причем сначала одна плоскость симметрии и две плоскости скольжения (14), затем одна плоскость симметрии и одна плоскость скольжения (15, 16, 17) и, наконец, центр инверсии с одной плоскостью скольжения (18, 19, 20, 21, 22, 23).

Так исчерпывается вывод всех систем, которые имеют плоскости симметрии и центр инверсии. Остается отыскать лишь системы с поворотными осями и плоскостями скольжения. Соответственно этому сначала отыскиваются системы с тремя плоскостями скольжения (24), с двумя плоскостями скольжения (25, 26, 27) и с одной плоскостью скольжения (28, 29, 30, 31, 32, 33). Таким образом, мы можем убедиться, что при этом не пропущена ни одна система и нет двух идентичных систем.

48. Среди систем тетрагональной сингонии имеются также фанеротипные с производной формой abc, но здесь a не может содержать ни 3, 7, ни 3′, 7′; если бы это было так, то введение одного элемента симметрии связи определяло бы однозначно всю систему, и тогда мы получили бы систему I порядка.

Если системы криптотипные, то следует различать системы с криптотипными колоннами единичного направления и системы с криптотипными слоями. Для первых в качестве производных форм действительны $\frac{a}{a'}bb$ и $\frac{a}{a'}bc$, где, конечно, b не зависит от c, так как уже два первых члена этой формы полностью определяют систему. Для последних действительны производные формы $a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$, где b, c содержат числа 3,7 или 3′, 7′.

Здесь сначала выделяются колонны VIII порядка. Это возможно лишь в том случае, когда полярные винтовые оси 4-го порядка выступают криптотипно. Для таких систем действительны производные формы $\frac{a}{a'}$ 11 и $\frac{a}{a'}$ bb, где a, a' не могут быть элементами четной симметрии, т. е. обозначают только 2′, 4′, 6′. Первая из этих форм относится к системам с винтовой осью одного и того же направления вращения. Встречается это только в 13-м виде симметрии.

Системы 15-го вида симметрии можно вывести из предыдущих путем простого введения элементов явной симметрии. Но это не относится к системам, у которых 5 выступает явно, так как мы имеем для них явную симметрию, подчиненную симметрии связи. Эти системы не могут быть фанеротипными, так как иначе мы получили бы системы IV порядка. Вследствие теоремы 1 § 29 единичные слои этих систем не могут содержать криптотипических колонн. Таким образом, остаются лишь формы $\frac{a}{a'}bb$ или $\frac{a}{a'}bc$. Для a и a' исключены центральные элементы симметрии связи и допустимы только периферийные. Для b должны быть исключены центральные элементы симметрии единичного направления на основании теоремы 1 § 29, но к плоскости скольжения 1′ это не относится, так как соответствующее ей направление скольжения не является единичным. Единичные горизонтальные винтовые оси возможны лишь в том случае, если они не вводят с собой для членов криптотипной колонны новых элементов симметрии связи.[16]

[16] Что касается систем (15) $(1 1 1 1)_r$, (17) $(1 1 1 1)_r$ и других, в которых встречаются полярные винтовые оси высших порядков, то применительно к ним теоремы § 23 пре-

49. Что касается систем кубической сингонии, то системы 28-го вида исключаются с самого начала, 29-го вида следует выбирать из систем 8-го вида симметрии, системы 30-го вида — из систем 14-го вида симметрии, системы 31-го вида — из систем 13-го вида симметрии и системы 32-го вида — из систем 15-го вида симметрии, из тех систем, которые допускают введение оси симметрии 3-го порядка, выступающей обязательно явно. Отсюда прежде всего следует, что криптотипные системы должны быть исключены с самого начала. Из систем 8-го вида симметрии остается рассмотреть системы 1-ю и 24-ю, так как все остальные отличаются различными элементами симметрии связи. Из систем 14-го вида симметрии следует принимать во внимание только 1-ю и 2-ю, из систем 13-го вида симметрии — 1-ю и 2-ю, наконец, системы 32-го вида симметрии могут быть выведены из предыдущих путем добавления элементов симметрии 5′, 8 и 4′.

50. Возможность появления систем XVI порядка сразу же ограничивается 15-м и 32-м видами симметрии. Системы последнего вида, если они вообще имеются, могли бы быть выведены из первых.

По самому характеру этих систем среди них невозможно встретить фанеротипные, так как они были бы самое большое VIII порядка. Таким образом, здесь мы снова должны различать системы с криптотипной единичной колонной и системы с фанеротипной колонной. В основе первых лежат производные формы $\frac{a}{a'}bc$ и $\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$. Ход вывода заключается в том, чтобы отыскать для a и a' допустимые характеристические числа и затем установить допустимое число для b; все остальные числа будут найдены сами собой, так как они зависят от первых.

Четыре последние системы — это такие особые системы, в которых в направлении единичной колонны выступают криптотипно полярные винтовые оси 4-го порядка, следовательно, они VIII порядка.

Из списка систем XVI порядка, составленного таким образом, легко заметить, что ось симметрии 3-го порядка явно не включается. Из этого следует, что для кубической сингонии систем этого порядка не существует.

51. Системы гексапараллелоэдров и гептапараллелоэдров имеют так много общего, что целесообразно их рассматривать вместе. Аналогии основаны на том, что, за исключением триклинной сингонии, пространственные фигуры всегда имеют грани, не подчиненные единичным колоннам. Так как это обстоятельство имеет важнейшее значение при нахождении производных форм, то в подавляющем большинстве случаев в основе систем лежат одни и те же системы точек. Отсюда возникает бросающаяся в глаза аналогия и в символах. Наиболее ярко она выражена у тетрагональных и гексагональных видов. Наоборот, наиболее резкое различие выявляется для кубической сингонии, так как, например, системы II порядка существуют только среди систем гептапараллелоэдров и не существуют среди систем гексапараллелоэдров.

терпевают некоторые изменения. Но это так просто, что, вероятно, достаточно сделанного указания.

Что касается специально систем II порядка, то очевидно, что мыслимы лишь производные формы *a*11 (или 1*a*1, 11*a*), 1*aa* (или *a*1*a*, *aa*1) и *aaa*. В триклинной сингонии мы имеем эквивалентность производных форм *a*11 и *aaa* для гексапараллелоэдров и *a*11 и 1*aa* для гептапараллелоэдров, тогда как и первые и последние относятся к трипараллелогональной первичной системе слоев, *aaa* для гептапараллелоэдров — к системе решетки, 1*aa* для гексапараллелоэдров — к дипараллелогональной системе слоев. Но так как слои I порядка системы слоев могут соответствовать только единичным плоскостям, которые невозможны для кубической сингонии, то само собой разумеется, что для нее невозможны и системы гексапараллелоэдров.

В остальном ход вывода систем II порядка настолько прост, что вряд ли требуются пояснения.[17]

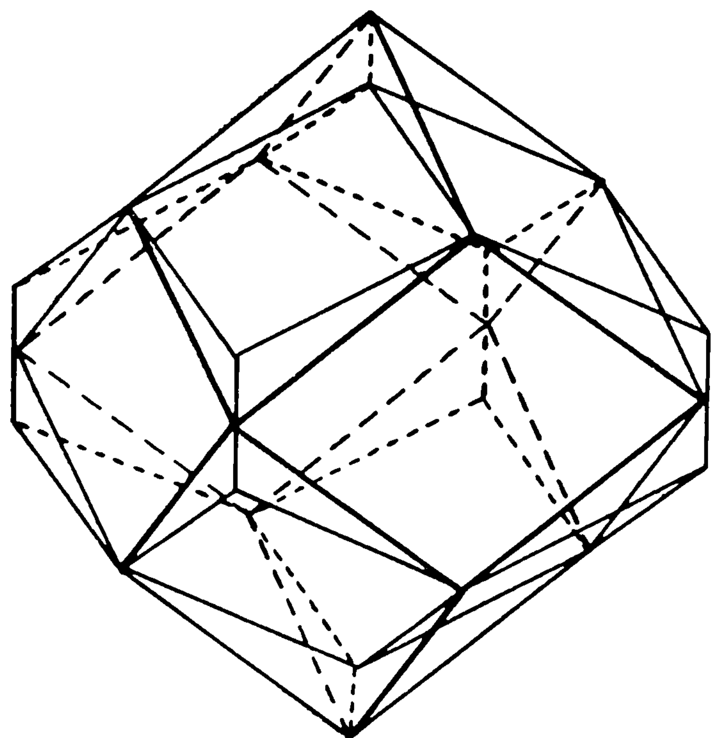


Рис. 20.

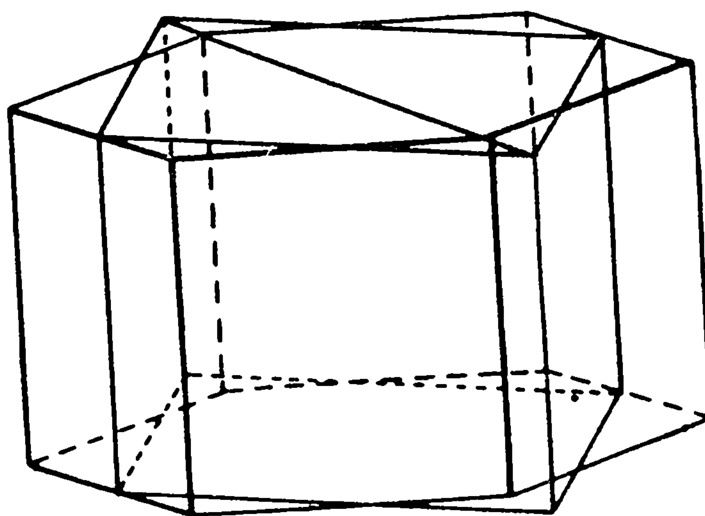


Рис. 21.

[17] При сравнении совершенно различных систем параллелоэдров мы наблюдаем как общий случай, что в их основе лежит одна и та же правильная система точек, что собственно совершенно очевидно из приводимых символов. Но так как все правильные системы точек резко отличаются друг от друга по закону распределения элементов симметрии, и, наоборот, те системы, которые содержат одни и те же элементы симметрии в одном и том же пространственном распределении, рассматриваются как одна, то это обстоятельство показывает, что различие таких систем основано не только на законе распределения.

С самого начала в работе подчеркивалось, что следует рассматривать не только элементы симметрии и их распределение в пространстве, но и распределение колонн, слоев и их отношение к элементам симметрии. Было установлено, что это распределение в системе параллелоэдров различного вида различно. При этом не имеет значения, оперируем ли мы с первичными или хотя бы со вторичными параллелоэдрами, так как конструкции, служащие для этого, не влияют на распределение колонн и слоев в пространстве.

Однако уместно указать на то, что имеются особые построения, служащие для изменения формы параллелоэдра, рассматриваемого как первичный, или даже для перевода параллелоэдра одного вида в другой (рис. 20, 21).

Наглядно конструкция 1-го вида представлена на рис. 20. Она принадлежит к тем, которые превращают первичный параллелоэдр во вторичный; если же и эта конструкция не имеет влияния на распределение слоев и колонн, то форма параллелоэдра

52. Системы III порядка настолько аналогичны трипараллелоэдрам, что теперь следует лишь сослаться на рассуждения § 40.

Что касается положения полярных винтовых осей, то легко доказать, что их точки пересечения с гранями определяются при помощи следующих построений.

Для гексапараллелоэдра (рис. 22) следует провести большие диагонали ромбов *ab*, *bc* и *ca* и из точки *A* — прямые *Ae* и *Ae'*, где точки *e* и *e'* — лежат в серединах соответствующих ребер. Точки пересечения *r* определяют правые оси, а точки пересечения *l* — левые.

благодаря ей все же существенно меняется. Возникает та самая форма, которая с 70-х годов названа автором удлиненным гексапараллелоэдром. Еще более глубокие преобразования демонстрирует конструкция, представленная на рис. 21. Она также превращает первичный параллелоэдр во вторичный, но по существу в параллелоэдр одного вида, а именно в тетрапараллелоэдр, в параллелоэдр другого вида — в трипараллелоэдр или, наоборот, трипараллелоэдр — в тетрапараллелоэдр. Как результат такого превращения мы получаем совершенно другое распределение колонн и слоев. Видно, что превращение происходит не постепенно, а сразу, нет никаких переходов между обоими крайними случаями, поэтому не может возникнуть никакого сомнения, с какого момента получается вместо системы тетрапараллелоэдра система трипараллелоэдра, или наоборот. Подобные конструкции можно строить и для других видов параллелоэдров. Но эти обстоятельства автор указывал с момента установления теории правильного деления плоскости и пространства (Н. У. Ф., § 58).

В заключение следует еще заметить, что среди рассматриваемых систем встречаются настолько близкие друг к другу, что может возникнуть вопрос, нельзя ли их рассматривать как идентичные. Сюда относятся, например, с одной стороны, все те системы трипараллелоэдров и тетрапараллелоэдров, в которых единицы не симметричны и в то же время плоскости симметрии выступают как периферийные элементы симметрии связи, а с другой стороны — те, в которых те же элементы симметрии выступают явно, если при этом правильная система точек, лежащая в их основе, остается той же самой. Имеются аналогичные в этом отношении примеры, когда ось симметрии 2-го порядка выступает, с одной стороны, периферийно, а с другой — явно. Аналогичное положение у систем трипараллелоэдров с асимметричными единицами и периферийными осями симметрии 4-го порядка и т. д. Во всех случаях такого рода, хотя и следует резко различать эти системы посредством соответствующих символов (эти системы обязательно принадлежат к разным порядкам), но необходимо помнить, что в основе их лежат не только идентичные правильные системы точек, но и распределение слоев и колонн можно рассматривать как аналогичное. По существу различие состоит здесь в том, что то, что в одном случае действительно для единицы, имеющей явную симметрию, в другом случае принимается для совокупности 2 и 4 единиц, теряющей соответствующую часть своей явной симметрии.

Я считаю, однако, единственно правильной как с чисто геометрической, так и с практической точки зрения (в отношении применения к теории структуры кристаллов) ту точку зрения, с которой такие системы рассматриваются, как различные.

С чисто геометрической точки зрения мы можем принимать за единицы фигуры как асимметричные, так и отличающиеся разными элементами симметрии. Этого обстоятельства уже достаточно , чтобы установить различие систем. Одновременно получаются также различия в отношениях элементов симметрии и колонн или слоев.

До сих пор вопрос, что собственно следует принимать за единицу структуры кристалла, не решен окончательно, и его требуется рассмотреть с различных сторон, и в первую очередь определить физические последствия различных решений. Таким образом, было бы нецелесообразно с самого начала отождествлять вещи, которые при более детальном рассмотрении могут оказаться очень различными.

Для гептапараллелоэдра (рис. 23) нужно провести диагонали aa', bb' и cc' и соединить вершины углов A, A', B, B', C и C' перпендикулярной к оси грани соответственно с серединами ребер e, e', f, f', g и g'. Точки пересечения r определяют положение правых осей, точки пересечения l — левых.

53. Так как нахождение систем IV порядка более сложно, мы остановимся на нем подробнее.

Три числа abc производной формы не могут не зависеть друг от друга, так как это означало бы систему по меньшей мере VIII порядка.

Рассмотрим сначала фанеротипные системы гексапараллелоэдра.

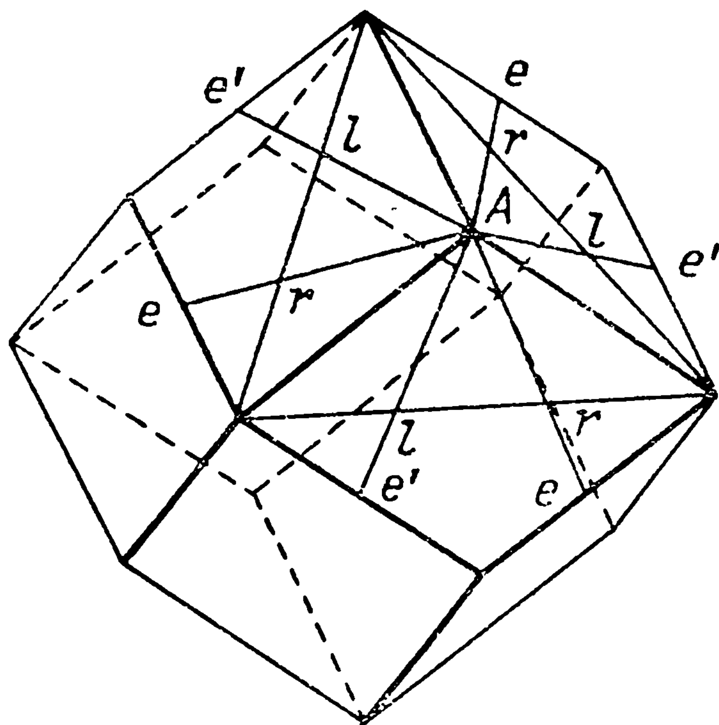


Рис. 22.

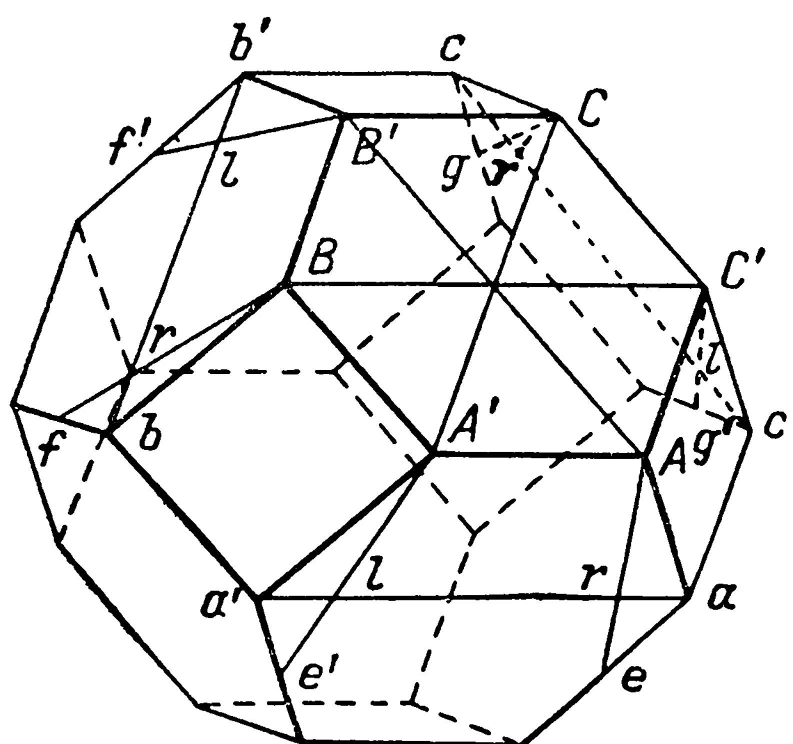


Рис. 23.

Числа b и c не могут быть равны 1. Если бы одно из них равнялось 1, то мы имели бы колонны I порядка и не единичного направления; другая эквивалентная колонна I порядка обусловила бы появление слоя I порядка, и система была бы криптотипной. Также числа c и b не могут быть равны a, так как иначе мы получили бы колонну не единичного направления, следовательно, система была бы криптотипной.

Для систем гептапараллелоэдров по той же причине ни одно из трех чисел не может быть равно 1, и для них a не может быть равно ни b, ни c, так как такое равенство обусловило бы появление ряда I порядка и не единичного направления, а две эквивалентные колонны I порядка обусловили бы возникновение системы слоя.

54. Если имеется одна колонна более высокого порядка $\frac{a}{a'}$, а другая определяется характеристическими числами $\frac{b}{b'}$, то следует, что если b равется a, b не может быть равно b'; если бы это было так, то мы получили бы сетку I порядка, к которой принадлежит и единица a', и тогда a было бы равно a', что противоречит условию.

Из этого следует, что *если мы имеем колонну более высокого порядка* $\frac{a}{a'}$, *то ни одна фанеротипная колонна не может характеризоваться числами* a *или* a'.

Если $a=b$, то легко убедиться, что и a' должно быть равно b'. Действительно, единицы a и b определяют ряд I порядка, a' и b' принадлежат к одному параллельному ряду I порядка, и следовательно, равны между собой.

Для систем IV порядка принятие двух различных колонн $\frac{a}{a'}$ и $\frac{b}{b'}$ более высокого порядка невозможно, так как здесь имеется в распоряжении всего три различных характеристических числа.

55. При выборе характеристических чисел необходимо принимать во внимание следующие ограничения.

Для гексапараллелоэдров исключено принятие $a=3$, $a=7$, $a=3'$, $a=7'$, $a=4$, так как оно имело бы следствием появление соответствующих элементов симметрии в явной форме, и тогда они вообще не были бы элементом симметрии связи. Если $c=3'$, то $b=7'$, $a=5$.

Для гептапараллелоэдра необходимо принять, что при $c=3$ $a=7$ и при $a=3$ $b=7$, и наоборот (при $a=7$ $c=3$ и при $b=7$ $a=3$).

56. Для систем моноклинной сингонии необходимо принимать во внимание различные основные типы, а именно: для гексапараллелоэдра — 3χVI и 3χVI$'$, для гептапараллелоэдра — 3χVII и 3χVII$'$.

Для типа 3χVI с элементом симметрии связи $1'$, 5 и $5'$ мы получаем все фанеротипные системы непосредственно путем простой перестановки чисел, причем числа b и c как эквивалентные не переставляются. Причина этого в том, что нельзя взять ни $b=c$, ни $a=b$ (или c).

Для криптотипных систем можно взять a равным $\frac{5}{5'}$, так как $1'$ центрально; b, кроме $\frac{5}{5'}$, может быть $\frac{5'}{1'}$, но не $\frac{5}{1'}$.

Для типа 3χVI и фанеротипных систем также нельзя брать ни $b=c$, ни $a=b$ (или c); таким образом, остается переставлять числа b и c.

В криптотипных системах колонна a вообще не может быть криптотипной, так как a не может быть равно ни 4, ни $8'$. Для b подстановка $\frac{4}{8'}$ недопустима (тогда $5'$ обязательно появилось бы явно). Таким образом, остается два допустимых предположения — $\frac{b}{b'}=\frac{5'}{8'}$ и $\frac{b}{b'}=\frac{5'}{4}$.

Для гептапараллелоэдров типа 3χVII настолько очевидна аналогия с типом 3χVI, что здесь возможно лишь повторение.

Все фанеротипные системы гептапараллелоэдров IV порядка вообще являются системами колонн, так этой пространственной фигуре подчинены 7 колонн, а число элементов симметрии связи 3, и ни один из них не может принадлежать более чем одной колонне. В типе 3χVII$'$ существует лишь одна вертикальная колонна единичного направления, значит, она обязательно должна быть колонной I порядка, но из этого следует, что $b=c'$ и $c=b'$, т. е. $b=b'=c=c'$. Это условие ведет к тому, что допустима только производная форма abb и что исчерпывающее пред-

ставление систем получается при простой и полной перестановке чисел 4,5′ и 8′.

Для криптотипных систем вообще недопустимо принятие $b=4$ (так как тогда элемент симметрии был бы центральным); также исключается $\frac{a}{a'}=\frac{4}{8'}$ (это привело бы к явной симметрии). Остается допустимым лишь принятие $b=\frac{5'}{8'}$ и $a=\frac{5'}{8'}$ и $\frac{4}{5'}$.

57. Для ромбической сингонии следует прежде всего подчеркнуть, что не у всех основных типов имеются соответствующие фанеротипные системы, имеющие грани, подчиненные колонны которых занимают совершенно общее положение, т. е. стоят наклонно ко всем трем единичным направлениям. Такие направления в количестве 4 выступают эквивалентно. Помимо 8-го вида симметрии, мы находим, что все элементы симметрии связи являются секущими. Каждый из них в отдельности определяет ряд или колонну I порядка, два из них должны определять сетку слоя или слой I порядка. Такие системы IV порядка не могут быть фанеротипными. Системы 8-го вида симметрии можно вывести из предыдущих путем введения явной симметрии, с обязательным сохранением производной формы.

Итак, фанеротипные системы допустимы только для типов 7 VI, 7 VII, $3\varphi''$VI, $3\varphi''$VII, $3\varphi''$VII′, 7χVI и 7χVII. Для гексапараллелоэдров при этом годится лишь производная форма *abc*, а для гептапараллелоэдров — *abb*. Для каждого вида симметрии затем следует только переставить характеристические числа, принимая во внимание кажущуюся симметрию.

Криптотипные системы, как системы, состоящие только из слоев или сеток I порядка, можно очень легко вывести, принимая во внимание, что плоскости слоев могут быть только единичными.

58. Для систем тетрагональной сингонии возможность появления элементов симметрии как элементов симметрии связи значительно ограничена, и кажется целесообразным представить индивидуальные свойства этих элементов в виде таблицы. В нашем распоряжении находятся периферийные элементы симметрии. Некоторые ограничения для них упомянуты выше (§ 55). Появление центрального элемента имеет своим следствием возникновение колонны II порядка. Но если эта колонна не единичного направления, то тем самым обусловливаются 4 колонны (по числу эквивалентных направлений) II порядка, следовательно, возникает фанеротипная система.

Для 1′ (в особенности *a* гексапараллелоэдра) прежде всего обусловливается только единичный фанеротипный слой, для него справедлива 1-я теорема § 29. Несмотря на то что направление скольжения не единично, из наличия винтовых осей 4-го порядка следует, что одновременно имеются оба перпендикулярных друг другу направления скольжения. И в этом случае, как следует из теоремы, система является фанеротипной. Короче говоря, если выступает один центральный элемент симметрии связи, то система является фанеротипной. Если выступает один секущий

элемент в единичном направлении, то этим обусловливается система колонн. Если же направление не единичное, то обусловливается система слоя или сетки слоев, которая не может быть фанеротипной, а будет только криптотипной. Но так как теперь слои могут быть только единичными, то колонна, обусловленная указанным элементом, должна быть параллельна единичной плоскости. Такие колонны можно изобразить очень просто.

Представим все эти свойства элементов симметрии в виде схемы.

		1′	2	6	2′	6′	4	8	4′	8′	3	7	3′	7′	5	5′
Гексапараллелоэдры	*a*	*ph*	*s*	*s*	*s*	*s*	*x*	*ph*	—	*ph*	*x*	*x*	—	—	—	—
	b	*s*	*ph*	*c*	*s*	—	*x*	*x*	*s*	*s*	—	—	—	—	*c*	—
	c	*s*	*c*	*ph*	—	*s*	*x*	*x*	*s*	*s*	—	—	—	—	*c*	—
Гептапараллелоэдры	*a*	*s*	*x*	*x*	*s*	*s*	*c*	*ph*	—	*s*	—	—	—	—	*c*	—
	b	*s*	*x*	*x*	*s*	*s*	*ph*	*c*	*s*	—	—	—	—	—	*c*	—
	c	*s*	*x*	*x*	*s*	*s*	*ph*	*c*	*s*	—	—	—	—	—	*c*	—

На этой схеме *ph* означает фанеротипную систему, *c* — систему колонн, *s* — систему слоя сетки или систему слоя, «—» означает периферийный элемент симметрии, а *x* — невозможность системы.

Отыскание систем относится собственно к 9-му и 11-му видам симметрии и видам симметрии 10-му и 12-му, 13-му и 14-му, которые явно содержат элемент 5; остальные выводятся из предыдущих путем добавления явных элементов симметрии 2-го порядка. Системы 15-го вида симметрии также легко вывести из предыдущих путем включения видов симметрии 2-го порядка в явной форме, при этом не нужно принимать во внимание все четыре (а именно, 10-й, 12-й, 13-й и 14-й). Остается лишь образовать подчиненные группы симметрии (5-й, 6-й, 7-й, 9-й и 11-й виды симметрии), а затем принять во внимание только нужные. Так как включаемые виды симметрии должны изображать группы, которые не подчинены группе симметрии связи и не зависят от нее, то мы можем, например, получить все системы из систем 12-го вида путем включения элементов симметрии 2, 4, 6, 8, 2′, 4′, 6′, 8′ и, таким образом, включить явно 5-й, 6-й и 7-й виды симметрии, а не 9-й и 11-й. Особенно для 9-го вида симметрии мы должны принять во внимание системы 14-го вида симметрии, а для 11-го — системы 13-го (или 10-го) вида симметрии.

59. Для систем гексагональной сингонии мы должны лишь повторить рассуждения, относящиеся к трипараллелоэдрам.

60. Все системы кубической сингонии можно вывести из систем 28-го вида симметрии и из тех систем 6-го вида симметрии путем включения явной оси симметрии 3-го порядка, которые допускают такое включение.

Для систем гексапараллелоэдров, таким образом, следует принимать во внимание только системы 1-го, 2-го и 3-го видов симметрии, а для гептапараллелоэдров — те фанеротипные системы 6-го вида симметрии, которые лежат в основе типа 6VII, но таких не имеется. Из этого можно заключить, что системы гептапараллелоэдров IV порядка кубической сингонии вообще невозможны.

Из лежащих в основе трех систем гексапараллелоэдров только в 1-ю и 3-ю можно включить упомянутую ось симметрии. Следовательно, возможны только две системы гексапараллелоэдров IV порядка 28-го вида симметрии. Две системы 29-го вида симметрии можно вывести из них путем добавления центра инверсии. Системы 30-го вида симметрии получаются путем включения плоскости симметрии 8, а системы 31-го вида симметрии — путем включения оси симметрии 2-го порядка 4′, однако такое включение возможно только для системы 19 (13 VI). Наконец, имеется одна система 32-го вида симметрии, которая может быть образована путем включения в совокупности видов симметрии 4′, 5′ и 8.

61. Для систем VI порядка мы можем лишь повторить рассуждения, относящиеся к системе трипараллелоэдров.

62. При нахождении систем VIII порядка ромбической сингонии следует принимать во внимание типы 7χVI, 6χVI, 6χVII и 7χVII.

В качестве предварительного замечания укажем, что теперь исключаются системы слоя или сетки слоев. Действительно, такие системы следовало бы понимать, как состоящие исключительно из параллельно стоящих слоев или сеток слоев I порядка, а тогда элемент симметрии, связывающий единицы каждого первого и третьего слоя, был бы 4-го порядка, что исключено для систем ромбической сингонии. Тем самым в то же время исключается каждый элемент симметрии связи, который обусловливает колонну или ряд колонн I порядка в неединичном направлении.

Основываясь на этом, легко представить относящиеся сюда системы.

Для типа 7χVI вообще имеются лишь следующие элементы симметрии связи: 1′, 2, 2′, 5, 5′, 6, 6′. Из них 5′ является периферийным для всех граней, 5 периферийно для *a*′, 6′ — для *b* и 2′ — для *c*; 1′, 2 и 6 являются центральными соответственно для *a*, *b* и *c*; все остальные являются секущими и обусловливают ряды колонн I порядка.

Для фанеротипных систем элементы симметрии связи вообще исключаются, так как такой элемент обусловил бы слой II порядка, а фанеротипная система, состоящая только из таких параллельных слоев II порядка, была бы системой IV, а не VIII порядка. Таким образом, для фанеротипных систем остаются лишь периферийные и центральные элементы. Вследствие этого мы можем произвольно выбрать два из них, например $b=2$, $c=6$, тогда a обязательно будет равно 5 и останется (§ 26) выбрать другую плоскость d. Если мы примем во внимание, что 2′ и 6′ в этом случае обязательно выступают периферийно, то увидим, что принятие $d=5'$ недопустимо и остается лишь одно решение — $d=1'$; таким образом, возникает единственная относящаяся сюда система.

Все остальные системы являются криптотипными. Так как в них обязательно имеются слои II порядка, то сами эти системы следует рассматривать как состоящие только из таких параллельных слоев. При этом эти слои образуют криптотипный ряд. Ради точности мы можем принять, что слои эти горизонтальны, тогда комбинации элементов симметрии определятся путем целесообразной замены.

Для типа 6χVI, где имеются элементы симметрии 1′, 4, 4′, 5, 5′, 8, 8′, мы находим, что только 5′ является периферийным для всех граней; для всех граней *b* и *c* все остальные элементы являются секущими. Из этого следует, что невозможен выбор такого положения, при котором два секущих элемента симметрии были бы исключены, т. е. невозможны сами такие системы.

Системы гептапараллелоэдров, а именно тип 7χVII, мы получим непосредственно, основываясь на аналогии с 7χVI. Системы типа 6χVII также невозможны.

63. Для систем тетрагональной сингонии системы слоев допустимы, так как действительно имеется элемент симметрии 4-го порядка, который может выступать скрыто, — это полярная винтовая ось 4-го порядка. Те секущие элементы симметрии, которые обусловливают колонну I порядка, наклонную к единичному направлению, совершенно исключаются; те, которые обусловливают колонну I порядка, параллельную единичной плоскости, ведут к образованию системы слоев, а элементы симметрии в единичном направлении — к образованию систем колонн, однако последние не могут выступать фанеротипно, так как в противном случае образовались бы системы не более IV порядка. Наличие центрального элемента симметрии связи обусловливает непременное образование фанеротипной системы.

Системы слоев VIII порядка возможны лишь в том случае, если все полярные винтовые оси, выступающие криптотипно, имеют один и тот же знак поворота. При этом исключается наличие каких-либо элементов прямой симметрии; следовательно, такие системы возможны только для 13-го вида симметрии.

При их отыскании мы должны снова воспользоваться таблицей § 58. Но здесь для систем VIII порядка исключается принятие $a=3'$ и $a=7'$ (иначе последовала бы явная симметрия).

Для 10-го вида симметрии исключаются системы слоев; следовательно, ни одно из трех чисел *a*, *b*, *c* не может быть равно другому, но так как для гексапараллелоэдров также исключается и принятие $a=3$, $a=7$, то или *b*, или *c* должны быть равны одному из этих чисел. Из относящегося сюда комплекса чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 для *b* и *c* исключаются числа 4 и 8. Другие предположения недопустимы.

Системы гептапараллелоэдров можно получить непосредственно на основании аналогии с предыдущими.

Для 12-го вида симметрии можно найти единственную фанеротипную систему непосредственно, приняв $b=7'$, $c=3'$, так как из этого следует $a=5$ и однозначно определяются положения винтовых осей 4-го порядка. При этом $d=1'$. Остается лишь принять, что $d=5'$ или 5, и тогда появятся две криптотипные системы.

Системы гептапараллелоэдров получаются непосредственно на основании их аналогии.

Точно так же для 13-го вида симметрии можно однозначно определить единственную фанеротипную систему гексапараллелоэдров, подставив,

например, $b=7$ и $c=2'$. Как фанеротипная, она обязательно содержит полярные оси противоположного вращения. Остальные системы определяются таким образом — или обоим числам b и c дается значение 3 или 7, или одно из этих чисел приписывается, например, b, а другое — c'. В первом случае b' и c', во втором b' и c соответствуют точно определяемые числа для периферийных элементов симметрии $2'$ или $6'$.

Но если принять одно из последних чисел за выражение секущей винтовой оси, то обязательно получится система слоев с криптотипными полярными осями. В зависимости от направления вращения различают две системы.

Для гептапараллелоэдров системы находятся полностью непосредственно на основании аналогии.

Для 14-го вида симметрии происходит отыскание систем особенно просто, так как для этого необходимо подставить вместо b и c числа $3'$ и $7'$, а вместо остальных наклонных плоскостей — периферийные или только те секущие оси симметрии, которые обусловливают ряды I порядка.

Системы 15-го вида симметрии можно образовать из предыдущих путем включения элемента симметрии 2-го порядка в явной форме. Таким образом, нужно испытать системы, допускают ли они такое включение? Эта операция невозможна только для явно имеющейся оси 5, так как она всегда образует подчиненный вид симметрии. Следовательно, для нее нужно применить особую операцию.

На основании теоремы 1 § 29 мы делаем вывод, что в этом случае ряды, параллельные единичной плоскости, обязательно I порядка; значит, слои, параллельные этой плоскости, будут не более II порядка. Относящуюся сюда систему следовало бы, таким образом, рассматривать как систему, состоящую только из параллельных слоев не более II порядка. Слоев I порядка быть не должно, так как нет элемента симметрии 8-го порядка, который в этом случае должен был бы выступать криптотипно. Значит, допустимы лишь слои II порядка, которые представляют собой последовательность из 4 различных членов, и ни одна единица одного из этих слоев не может иметь одинаковую ориентировку с какой-нибудь единицей каждого из трех других слоев. Тем самым как элементы симметрии связи исключаются все те элементы (2, 4, 6, 8), которые не удовлетворяют этому условию; исключаются также 3 и 7, так как они должны принадлежать к полярным винтовым осям, выступающим криптотипно (причем, конечно, должны бы были появиться оси двух разных вращений). Для 4 пар наклонных плоскостей остаются возможными лишь следующие группы: a) $1'$, $5'$, b) $2'$, $6'$, c) $4'$, $8'$, d) $3'$, $7'$. Но так как из двух групп b) и c) одна принадлежит элементам симметрии, обусловливающим образование колонн I порядка, а следовательно, и слоев I порядка, то из них допустима только одна. Отсюда следует, что вообще не существует такой системы.

64. Системы кубической сингонии можно произвести просто из предыдущих путем включения явно оси симметрии 3-го порядка.

Для гексапараллелоэдров 29-го вида симметрии нужно испытать только систему 18-го вида симметрии на возможность этого включения (а так как это возможно, то мы действительно получаем относящуюся сюда систему). Для гексапараллелоэдров 30-го вида симметрии таким же образом получают из системы I 14-й вид симметрии, а для 31-го вида симметрии получают новую систему из системы I 13-го вида симметрии. Так как во всех этих случаях имеется лишь по одной системе, то исключаются все остальные варианты, и никакая система больше невозможна.

Наконец, мы получаем еще две новые системы 32-го вида симметрии путем включения центра инверсии плоскости симметрии 8 в только что полученные системы. И здесь все другие предположения исключаются.

Аналогичное исследование для системы гептапараллелоэдров приводит нас к тому, что в 1-ю систему 8-го вида симметрии не могут быть включены оси симметрии 3-го порядка, что, собственно, видно из того, что из трех эквивалентных (в отношении включаемых осей симметрии) чисел 8, 8′ и 4′ два принадлежат к прямой симметрии, а одно — к симметрии сдвига. Что касается систем 13-го и 14-го видов симметрии, то испытание приводит нас к положительному результату, и мы получаем две новые системы 30-го и 31-го видов симметрии и притом по одной, с исключением других вариантов. Из этих обеих систем путем включения центра инверсии можно получить одну и только одну систему, принадлежащую 32-му виду симметрии.

65. Что касается систем XVI порядка, то нужно проверить следующие предположения: или а) одна такая система, относящаяся к 15-му виду симметрии, состоит только из параллельных слоев I порядка, или б) имеются слои II порядка, или, наконец, в) имеются слои IV или более высокого порядка.

Предположение а) сразу исключается, так как для такой системы необходимо наличие элемента симметрии 8-го порядка, который выступал бы криптотипно, а таких элементов симметрии не имеется. Предположение б) исключает из ряда элементов симметрии связи те, которые выражаются посредством чисел 3 и 7, а также все те, которые соединяют один слой с третьим, т. е. числа 2, 4, 6, 8, при этом числа обоих слоев, разделенных одним слоем, не зависят друг от друга, а связаны таким образом, что из них получаются результирующие полярные оси 4-го порядка. Здесь имеются определенно две и только две возможности: это или числа одного слоя 3′ и 7′ и другого 5′ и 1′, или числа одного слоя 2′ и 6′ и другого 4′ и 6′, но оба предположения ведут к системам VIII порядка.

При определении слоев IV порядка требуется, чтобы для каждого из двух слоев имелось по четыре элемента симметрии связи, удовлетворяющих поставленным условиям. Этого нет, так как из четырех элементов 2′, 4′, 6′, 8′ два всегда являются секущими и обусловливают возникновение слоев не более II порядка. Так как другие предположения исключаются, то мы получаем результат: системы гексапараллелоэдров и гептапараллелоэдров XVI порядка вообще невозможны.

66. Что касается нахождения систем тетрапараллелоэдров, то оно для всех видов симметрии, кроме гексагональной, настолько упрощается благодаря близкой аналогии с системами трипараллелоэдров, что может рассматриваться почти как повторение.

Но те же виды симметрии теперь будут выражаться другими характеризующими числами; вместо 5 нужно теперь поставить 7, вместо 5′—7′, вместо 2 и 6 — 2 и 8 и вместо 2′ и 6′—2′ и 8′. С точки зрения учения о кажущейся симметрии элементы симметрии 2′ и 8′, 2 и 8 теперь следует абсолютно отличать друг от друга потому, что 8′ и 8 должны быть перпендикулярны к слоям, которые могут быть обусловлены 2′ и 2. По этой причине большинство систем трипараллелоэдров моноклинной сингонии и трипараллелоэдры типа 5 III ромбической сингонии выступают в двойном числе. Этого не случается лишь тогда, когда имеются элементы симметрии, посредством которых обусловливается возникновение обеих систем в одинаковой форме.

Таким образом, можно особо говорить лишь о системах гексагональной сингонии.

Руководящее положение при этом отыскании — единичные плоскости параллельных слоев могут быть или I, или III порядка. Чтобы доказать это, нужно лишь сослаться на то, что граням единичной зоны подходят лишь числа 5 и 9, а все остальные исключаются. Эти числа указывают на периферийно выступающую ось симметрии 3-го порядка; числа 3, 3′, 7, 7′, 11, 11′ указывали бы на явно выступающую ось симметрии 6-го порядка или на ось составной симметрии 1-го вида (что непосредственно следует из теоремы 1 § 13 части I), а числа 1′, 5′ и 9′ — на явно выступающую ось 6-го порядка составной симметрии 2-го вида. Что касается, наконец, элементов симметрии 2, 2′, 4, 4′, 6, 6′, 8, 8′, 10, 10′, 12, 12′, то ни один из них не может выступать лишь как центральный или как секущий, т. е. не в форме осей симметрии или плоскостей симметрии, а в форме винтовых осей 2-го порядка или плоскостей скольжения. Но они обусловливают возникновение колонн рядов I и II порядков. Значит, при наличии одного из этих элементов симметрии связи в единичном слое и в каждой колонне или каждом ряду, относящемся к нему, должны быть члены сетки, составленной из одинаково ориентированных единиц; благодаря этому каждая колонна и каждый ряд этого слоя может быть связан с прилежащими параллельными колоннами или рядами посредством простой трансляции; результирующий элемент симметрии винтовой оси 2-го порядка или скользящей плоскости с этой трансляцией, согласно теоремам § 13 части I, был бы осью симметрии 2-го порядка или плоскостью симметрии, а они, как только что было указано, исключаются как элементы симметрии связи.

Основываясь на этом положении, мы делаем вывод, что все системы II и IV порядка обязательно являются системами слоев, которые очень легко полностью отыскиваются по порядку выступающих элементов симметрии. Благодаря фанеротипным единичным колоннам от них отличаются системы II порядка, тогда как в системах IV порядка криптотипно выступает плоскость скольжения или неполярная винтовая ось 6-го по-

рядка этих колонн. В системах 3-го порядка полярная винтовая ось 3-го порядка выступает центрально. В системах VI порядка эта ось выступает криптотипно (что может быть принято и в случае центрально выступающей полярной винтовой оси 6-го порядка). В системах XII порядка полярная винтовая ось 6-го порядка обязательно выступает криптотипно. Систем слоев более высокого порядка, конечно, быть не может, и даже у систем XII порядка исключаются элементы прямой симметрии и, таким образом, остается возможным лишь 25-й вид симметрии.

В системах, не являющихся системами слоев, ось симметрии 3-го порядка (или ось 6-го порядка составной симметрии 2-го вида) выступает периферийно.

Остается упомянуть, что ось симметрии 6-го порядка вовсе не может выступать периферийно, тогда как ось 6-го порядка составной симметрии 1-го вида выступает лишь периферийно по отношению к грани *a* (т. е. полупериферийно).[18]

Ради наглядной характеристики систем, в символы введены буквы *s*, *v*, *c* и *h*, из которых первая означает горизонтальные слои, вторая — вертикальные слои, третья — вертикальные колонны и четвертая — горизонтальные колонны.

67. Если мы сравним все полученные результаты, которые должны охватывать все правильные системы точек, имеющие главные точки, с данными ранее системами точек (в количестве 230), то увидим, что теперь представлены все эти системы, за исключением систем, обозначенных (40) и (41). Обе эти системы соответствуют гироэдрическому виду симметрии (величина которого равна 24). Доказательство того, что эти системы действительно не имеют главных точек, содержится в предыдущем выводе. Если бы эти системы содержали основные точки, то им соответствовали бы какие-то правильные системы параллелоэдров, и мы доказали бы наличие других систем, а именно систем тетрагональной сингонии (13-й вид симметрии), которые отличаются от этих благодаря присутствию осей симметрии 3-го порядка и винтовых осей и, кроме того, благодаря некоторому количеству результирующих элементов симметрии. Такие системы параллелоэдров были бы самое большее VIII порядка и допускали бы введение элементов симметрии 3-го порядка. Но так как среди систем 13-го вида симметрии таких систем нет, то нет и никаких систем параллелоэдров, соответствующих системам (40) и (41).

В силу рассуждений, развитых в § 19, мы должны рассматривать относящиеся сюда правильные деления пространства, как состоящие из некоторого числа параллелоэдров. Этот вопрос должен обсуждаться особо.

---

[18] Для наглядности все системы гексапараллелоэдров и гептапараллелоэдров представлены в рисунках (Приложение, табл. VI—XIII). Из чертежей очень легко представить себе системы трипараллелоэдров и тетрапараллелоэдров с соответствующим им расположением элементов симметрии. Сделать это для систем гексапараллелоэдров и гептапараллелоэдров несколько труднее.

Обе эти системы могут рассматриваться как один случай, так как они в основном одного вида и одна из них может быть выведена из другой путем зеркального отражения.

Из уравнений этих систем можно доказать, что оси симметрии 3-го порядка пересекаются с осями симметрии 2-го порядка. Такую точку пересечения для системы (40) можно определить при помощи координат $x_0 = -\frac{\lambda}{8}$, $x_1 = -\frac{\lambda}{8}$, $x_2 = -\frac{\lambda}{8}$. Если мы введем эти значения координат в соответствующие уравнения, то совокупность из 24 точек различных положений сведется к совокупности всего из 4 точек. То же самое еще более ясно видно из соответствующей диаграммы. Таким образом, эти точки являются тригонально-трапецоэдрическими центрами симметрии, т. е. точками, в которых ось симметрии 3-го порядка пересекается с тремя перпендикулярными к ней осями симметрии 2-го порядка. Тем самым доказано, что из всех видов параллелоэдров такие центры симметрии выступают полупериферийно только в гептапараллелоэдрах (т. е. из совокупности элементов симметрии, относящихся к этому центру, лишь один выступает явно).

К тому же результату мы приходим и путем сравнения обеих систем с системой (39). Эта система, как видно из ее уравнения, может рассматриваться как совокупность из двух систем (40) и (41). Но ей соответствует лишь одно решение — система параллелоэдров (39) (13 VII) VIII порядка. Отсюда можно непосредственно вывести, что системам (40) и (41) также соответствуют деления пространства, единицы которого следует рассматривать как состоящие из двух соседних гептапараллелоэдров.

Более подробное рассмотрение этого случая потребовало бы много места, но вопрос не представляет особого интереса.

Во всяком случае, вышеизложенное полностью решает задачу отыскания правильных делений плоскости и пространства. Н е в о з м о ж е н н и о д и н д р у г о й т и п, к р о м е п р и в е д е н н ы х з д е с ь.

Таблица 4

Системы трипараллелоэдров II и высшего порядков

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
Система трипараллелоэдров II порядка							
1. Триклинная сингония							
$a11$	2	2	1	$1\pi III$	1	$a=5'$	$1\pi\,(1III)^s$
$1aa$	2	2	2	$1\pi III$	1	$a=5'$	$1\pi\,(1III)^c$
aaa	2	2	3	$1\pi III$	1	$a=5'$	$1\pi\,(1III)$
II. Моноклинная сингония							
$a11$	3	2	1	$2III$	1	$a=5$	$(1)\,(1III_2)^s$
$1a1$	3	2	2	$2III$	1	$a=5$	$2\,(1III_2)^s$
$1aa$	3	2	3	$2III$	1	$a=5$	$2\,(1III_2)^c$
aaa	3	2	4	$2III$	1	$a=5$	$3\,(1III_2)$
$aa1$	3	2	5	$2III$	1	$a=5$	$3\,(1III_2)^c$
$a11$	3	2	6	$3III$	1	$a=4$	$3\,(1III_3)^s$
$1aa$	3	2	7	$3III$	1	$a=4$	$(1)\,(1III_3)^c$
aaa	3	2	8	$3III$	1	$a=4$	$3\,(1III_3)$
$a11$	4	2	1	$1\chi III$	1	$a=1'$	$1\chi\,(1III_2)^s$
$1a1$	4	2	2	$1\chi III$	1	$a=1'$	$1\chi 1\,(1III_2)^s$
$1aa$	4	2	3	$1\chi III$	1	$a=1'$	$1\chi 1\,(1III_2)^c$
$aa1$	4	2	4	$1\chi III$	1	$a=1'$	$1\chi'\,(1III_2)^c$
aaa	4	2	5	$1\chi III$	1	$a=1'$	$1\chi'\,(1III_2)$
$a11$	4	2	6	$1\chi' III$	1	$a=8$	$1\chi' 1\,(1III_3)^s$
$1aa$	4	2	7	$1\chi' III$	1	$a=8$	$1\chi 1\,(1III_3)^c$
aaa	4	2	8	$1\chi' III$	1	$a=8$	$1\chi' 1\,(1III_3)$
$a11$	5	4	1	$2\chi III$	$15'$	$a=1'5$	$1\,(\chi 1)\,(1\pi III_2)^s$
$1a1$	5	4	2	$2\chi III$	$15'$	$a=1'5$	$2\chi 1\,(1\pi III_2)^s$
$1aa$	5	4	3	$2\chi III$	$15'$	$a=1'5$	$2\chi 1\,(1\pi III_2)^c$
$aa1$	5	4	4	$2\chi III$	$15'$	$a=1'5$	$3\chi\,(1\pi III_2)^c$
aaa	5	4	5	$2\chi III$	$15'$	$a=1'5$	$3\chi\,(1\pi III_2)$
$a11$	5	4	6	$2\chi III$	15	$a=1'5'$	$2\chi\,(2III_2)^s$
$1a1$	5	4	7	$2\chi III$	15	$a=1'5'$	$2\chi 1\,(2III_2)^s$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$1aa$	5	4	8	2χIII	15	$a = 1'5'$	$2\chi1\,(2\mathrm{III}_2)^{c}$
$aa1$	5	4	9	2χIII	15	$a = 1'5'$	$3\chi\,(2\mathrm{III}_2)^{c}$
aaa	5	4	10	2χIII	15	$a = 1'5'$	$3\chi\,(2\mathrm{III}_2)$
$a11$	5	4	11	2χIII	11′	$a = 55'$	$1\,(\chi1)\,(1\chi\mathrm{III}_2)^{в}$
$1a1$	5	4	12	2χIII	11′	$a = 55'$	$2\chi\,(1\chi\mathrm{III}_2)^{в}$
$1aa$	5	4	13	2χIII	11′	$a = 55'$	$2\chi\,(1\chi\mathrm{III}_2)^{c}$
$aa1$	5	4	14	2χIII	11′	$a = 55'$	$3\chi\,(1\chi\mathrm{III}_2)^{c}$
aaa	5	4	15	2χIII	11′	$a = 55'$	$3\chi\,(1\chi\mathrm{III}_2)$
$a11$	5	4	16	3χIII	15′	$a = 4'8$	$3\chi1\,(1\pi\mathrm{III}_3)^{в}$
$1aa$	5	4	17	3χIII	15′	$a = 4'8$	$1\,(\chi2)\,(1\pi\mathrm{III}_3)^{c}$
aaa	5	4	18	3χIII	15′	$a = 4'8$	$3\chi1\,(1\pi\mathrm{III})$
$a11$	5	4	19	3χIII	14′	$a = 5'8$	$3\chi1\,(3\mathrm{III}_3)^{в}$
$1aa$	5	4	20	3χIII	14′	$a = 5'8$	$2\chi1\,(3\mathrm{III}_3)^{c}$
aaa	5	4	21	3χIII	14′	$a = 5'8$	$3\chi1\,(3\mathrm{III}_3)$
$a11$	5	4	22	3χIII	18	$a = 4'5'$	$3\chi\,(1\chi'\mathrm{III}_3)^{в}$
$1aa$	5	4	23	3χIII	18	$a = 4'5'$	$1\,(\chi1)\,(1\chi'\mathrm{III}_3)^{c}$
aaa	5	4	24	3χIII	18	$a = 4'5'$	$3\chi\,(1\chi'\mathrm{III}_3)$
				III. Ромбическая сингония			
$a11$	6	4	1	4III	15	$a = 2'6'$	$4\,(2\mathrm{III}_4)^{в}$
$1aa$	6	4	2	4III	15	$a = 2'6'$	$5\,(2\mathrm{III}_4)^{c}$
aaa	6	4	3	4III	15	$a = 2'6'$	$7\,(2\mathrm{III}_4)$
$1a1$	6	4	4	4III	15	$a = 2'6'$	$(3)\,(2\mathrm{III}_4)^{в}$
$aa1$	6	4	5	4III	15	$a = 2'6'$	$5\,(2\mathrm{III}_4)^{c'}$
$a11$	6	4	6	5III	15	$a = 4'8'$	$5\,(2\mathrm{III}_5)^{в}$
$1aa$	6	4	7	5III	15	$a = 4'8'$	$(2)\,(2\mathrm{III})^{c}$
aaa	6	4	8	5III	15	$a = 4'8'$	$6\,(2\mathrm{III}_5)$
$a11$	6	4	9	5III	14′	$a = 58'$	$(4)\,(3\mathrm{III}_5)^{в}$
$1aa$	6	4	10	5III	14′	$a = 58'$	$(3)\,(3\mathrm{III}_5)^{c}$
aaa	6	4	11	5III	14′	$a = 58'$	$(5)\,(3\mathrm{III}_5)$
$a11$	7	4	1	2φIII	15	$a = 26$	$2\varphi1\,(2\mathrm{III}_4)^{в}$
$1a1$	7	4	2	2φIII	15	$a = 26$	$2\varphi2\,(2\mathrm{III}_4)^{в}$
$1aa$	7	4	3	2φIII	15	$a = 26$	$2\varphi'\,(2\mathrm{III}_4)^{c}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
*aa*1	7	4	4	2φIII	15	$a=26$	3φ1 (2III$_4$)^c
aaa	7	4	5	2φIII	15	$a=26$	3φ″ (2III$_4$)
*a*11	7	4	6	2φIII	12	$a=56$	1 (φ1) (1χIII$_4$)^s
1*a*1	7	4	7	2φIII	12	$a=56$	2φ2 (1χIII$_4$)^s
11*a*	7	4	8	2φIII	12	$a=56$	2φ (1χIII$_4$)^s
1*aa*	7	4	9	2φIII	12	$a=56$	2φ′ (1χIII$_4$)^c
*aa*1	7	4	10	2φIII	12	$a=56$	3φ1 (1χIII$_4$)^c
*a*1*a*	7	4	11	2φIII	12	$a=56$	3φ (1χIII$_4$)^c
aaa	7	4	12	2φIII	12	$a=56$	3φ″ (1χIII$_4$)
*a*11	7	4	13	2φ′III	15	$a=48$	2φ′1 (2III$_5$)^s
1*aa*	7	4	14	2φ′III	15	$a=48$	2φ5 (2III$_5$)^c
aaa	7	4	15	2φ′III	15	$a=48$	3φ′2 (2III$_5$)
*a*11	7	4	16	2φ′III	18	$a=45$	1 (φ5) (1χ′III$_5$)^s
1*aa*	7	4	17	2φ′III	18	$a=45$	2φ2 (1χ′III$_5$)^c
aaa	7	4	18	2φ′III	18	$a=45$	3φ′1 (1χ′III$_5$)
*a*11	7	4	19	3φIII	14′	$a=1'4$	3φ2 (3III$_5$)^s
1*aa*	7	4	20	3φIII	14′	$a=1'4$	2φ3 (3III$_5$)^c
aaa	7	4	21	3φIII	14′	$a=1'4$	3φ′1 (3III$_5$)
*a*11	7	4	22	3φIII	11′	$a=44'$	3φ2 (1χIII$_5$)^s
1*aa*	7	4	23	3φIII	11′	$a=44'$	1 (φ1) (1χIII$_5$)^c
aaa	7	4	24	3φIII	11′	$a=44'$	3φ′1 (1χIII$_5$)
*a*11	7	4	25	3φIII	14	$a=1'4'$	3φ (1χ′III$_5$)^s
1*aa*	7	4	26	3φIII	14	$a=1'4'$	1 (φ2) (1χ′III$_5$)^c
aaa	7	4	27	3φIII	14	$a=1'4'$	3φ′ (1χ′III$_5$)
*a*11	8	8	1	4χIII	11′55′	$a=22'66'$	4χ1 (2χIII$_4$)^s
1*a*1	8	8	2	4χIII	11′55′	$a=22'66'$	3 (χ1) (2χIII$_4$)^s
1*aa*	8	8	3	4χIII	11′55′	$a=22'66'$	5χ (2χIII$_4$)^c
*aa*1	8	8	4	4χIII	11′55′	$a=22'66'$	5χ2 (2χIII$_4$)^c
aaa	8	8	5	4χIII	11′55′	$a=22'66'$	7χ (2χIII$_4$)
*a*11	8	8	6	4χIII	12′56′	$a=1'25'6$	4χ1 (4III$_4$)^s
1*aa*	8	8	7	4χIII	12′56′	$a=1'25'6$	5χ2 (4III$_4$)^c
aaa	8	8	8	4χIII	12′56′	$a=1'25'6$	7χ (4III$_4$)

Т а б л и ц а 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
*a*11	8	8	9	4χIII	1256	*a* = 1′2′5′6′	4χ (2φIII$_4$)^в
1*a*1	8	8	10	4χIII	1256	*a* = 1′2′5′6′	3 (χ1) (2φIII$_4$)^в
1*aa*	8	8	11	4χIII	1256	*a* = 1′2′5′6′	5χ2 (2φIII$_4$)^с
*aa*1	8	8	12	4χIII	1256	*a* = 1′2′5′6′	5χ (2φIII$_4$)^с
aaa	8	8	13	4χIII	1256	*a* = 1′2′5′6′	7χ (2φIII$_4$)
*a*11	8	8	14	5χIII	11′55′	*a* = 44′88′	5χ1 (2χIII$_5$)^в
1*aa*	8	8	15	5χIII	11′55′	*a* = 44′88′	2 (χ1) (2χIII$_5$)^с
aaa	8	8	16	5χIII	11′55′	*a* = 44′88′	6χ1 (2χIII$_5$)
*a*11	8	8	17	5χIII	14′5′8′	*a* = 1′458′	4 (χ1) (3χIII$_5$)^в
1*aa*	8	8	18	5χIII	14′5′8′	*a* = 1′458′	3 (χ2) (3χIII$_5$)^с
aaa	8	8	19	5χIII	14′5′8′	*a* = 1′458′	5 (χ1) (3χIII$_5$)
*a*11	8	8	20	5χIII	14′58′	*a* = 1′45′8	5χ1 (5III$_5$)^в
1*aa*	8	8	21	5χIII	14′58′	*a* = 1′45′8	4χ2 (5III$_5$)^с
aaa	8	8	22	5χIII	14′58′	*a* = 1′45′8	6χ1 (5III$_5$)
*a*11	8	8	23	5χIII	1458	*a* = 1′4′5′8′	5χ (3φ′III$_5$)^в
1*aa*	8	8	24	5χIII	1458	*a* = 1′4′5′8′	2 (χ3) (3φ′III$_5$)^с
aaa	8	8	25	5χIII	1458	*a* = 1′4′5′8′	6χ (3φ′III$_5$)
*a*11	8	8	26	5χIII	11′44′	*a* = 55′88′	4 (χ1) (3φIII$_5$)^в
1*aa*	8	8	27	5χIII	11′44′	*a* = 55′88′	3 (χ1) (3φIII$_5$)^с
aaa	8	8	28	5χIII	11′44′	*a* = 55′88′	5 (χ1) (3φIII$_5$)
IV. Тетрагональная сингония							
*a*11	9	4	1	8III	15	*a* = 37	(6) (2III)^в
1*aa*	9	4	2	8III	15	*a* = 37	8 (2III)^с
aaa	9	4	3	8III	15	*a* = 37	9 (2III)
*a*11	10	8	1	8φIII	1357	*a* = 2468	8φ1 (8III)^в
1*aa*	10	8	2	8φIII	1357	*a* = 2468	8φ2 (8III)^с
aaa	10	8	3	8φIII	1357	*a* = 2468	9φ1 (8III)
*a*11	10	8	4	8φIII	1256	*a* = 3478	6 (φ1) (2φIII)^в
1*aa*	10	8	5	8φIII	1256	*a* = 3478	8φ2 (2φIII)^с
aaa	10	8	6	8φIII	1256	*a* = 3478	9φ1 (2φIII)
*a*11	10	8	7	8φIII	1458	*a* = 2367	6 (φ2) (2φ′III)^в
1*aa*	10	8	8	8φIII	1458	*a* = 2367	8φ (2φ′III)^с
aaa	10	8	9	8φIII	1458	*a* = 2367	9φ (2φ′III)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a11$	11	4	1	2πIII	15	$a=3'7'$	2π (2III)^{в}
$1aa$	11	4	2	2πIII	15	$a=3'7'$	2π (2III)^{с}
aaa	11	4	3	2πIII	15	$a=3'7'$	3π (2III)
$a11$	12	8	1	8χIII	11′55′	$a=33'77'$	6 (χ1) (2χIII)^{в}
$1aa$	12	8	2	8χIII	11′55′	$a=33'77'$	8χ (2χIII)^{с}
aaa	12	8	3	8χIII	11′55′	$a=33'77'$	9χ (2χIII)
$a11$	12	8	4	8χIII	1357	$a=1'3'5'7'$	8χ (8III)^{в}
$1aa$	12	8	5	8χIII	1357	$a=1'3'5'7'$	8χ1 (8III)^{с}
aaa	12	8	6	8χIII	1357	$a=1'3'5'7'$	9χ (8III)
$a11$	12	8	7	8χIII	13′57′	$a=1'35'7$	6 (χ1) (2πIII)^{в}
$1aa$	12	8	8	8χIII	13′57′	$a=1'35'7$	8χ1 (2πIII)^{с}
aaa	12	8	9	8χIII	13′57′	$a=1'35'7$	9χ (2πIII)
$a11$	13	8	1	10III	12′56′	$a=34'78'$	(8) (4III)^{в}
$1aa$	13	8	2	10III	12′56′	$a=34'78'$	(7) (4III)^{с}
aaa	13	8	3	10III	12′56′	$a=34'78'$	11 (4III)
$a11$	13	8	4	10III	14′58′	$a=2'36'7$	(8) (5III)^{в}
$1aa$	13	8	5	10III	14′58′	$a=2'36'7$	10 (5III)^{в}
aaa	13	8	6	10III	14′58′	$a=2'36'7$	11 (5III)^{в}
$a11$	13	8	7	10III	1357	$a=2'4'6'8'$	10 (8III)^{в}
$1aa$	13	8	8	10III	1357	$a=2'4'6'8'$	(7) (8III)^{с}
aaa	13	8	9	10III	1357	$a=2'4'6'8'$	11 (8III)
$a11$	14	8	1	4δIII	12′56′	$a=3'47'8$	4δ1 (4III)^{в}
$1aa$	14	8	2	4δIII	12′56′	$a=3'47'8$	5δ2 (4III)^{с}
aaa	14	8	3	4δIII	12′56′	$a=3'47'8$	7δ1 (4III)
$a11$	14	8	4	4δIII	1458	$a=2'3'6'7'$	4δ (3φ′III)^{в}
$1aa$	14	8	5	4δIII	1458	$a=2'3'6'7'$	5δ (3φ′III)^{с}
aaa	14	8	6	4δIII	1458	$a=2'3'6'7'$	7δ (3φ′III)
$a11$	14	8	7	4δIII	13′57′	$a=2'46'8$	4δ1 (2πIII)^{в}
$1aa$	14	8	8	4δIII	13′57′	$a=2'46'8$	5δ2 (2πIII)^{с}
aaa	14	8	9	4δIII	13′57′	$a=2'46'8$	7δ1 (2πIII)
$a11$	14	8	10	5δIII	14′58′	$a=23'67'$	5δ1 (5III)^{в}
$1aa$	14	8	11	5δIII	14′58′	$a=23'67'$	4δ (5III)^{с}
aaa	14	8	12	5δIII	14′58′	$a=23'67'$	6δ (5III)
$a11$	14	8	13	5δIII	1256	$a=3'4'7'8'$	5δ (2φIII)^{в}

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
1*aa*	14	8	14	5δIII	1256	*a* = 3′4′7′8′	2 (δ1) (2φIII)^{с}
aaa	14	8	15	5δIII	1256	*a* = 3′4′7′8′	6δ (2φIII)
*a*11	14	8	16	5δIII	13′57′	*a* = 24′68′	5δ 1 (2πIII)^{в}
1*aa*	14	8	17	5δIII	13′57′	*a* = 24′68′	2 (δ1) (2πIII)^{с}
aaa	14	8	18	5δIII	13′57′	*a* = 24′68′	6δ (2πIII)
*a*11	15	16	1	10χIII	11′22′55′66′	*a* = 33′44′77′88′	8 (χ1) (4χIII)^{в}
1*aa*	15	16	2	10χIII	11′22′55′66′	*a* = 33′44′77′88′	7 (χ1) (4χIII)^{с}
aaa	15	16	3	10χIII	11′22′55′66′	*a* = 33′44′77′88′	11χ1 (4χIII)
*a*11	15	16	4	10χIII	11′44′55′88′	*a* = 22′33′66′77′	8 (χ1) (5χIII)^{в}
1*aa*	15	16	5	10χIII	11′44′55′88′	*a* = 22′33′66′77′	10χ (5χIII)^{с}
aaa	15	16	6	10χIII	11′44′55′88′	*a* = 22′33′66′77′	11χ (5χIII)
*a*11	15	16	7	10χIII	12345678	*a* = 1′2′3′4′5′6′7′8′	10χ (8χIII)^{в}
1*aa*	15	16	8	10χIII	12345678	*a* = 1′2′3′4′5′6′7′8′	10χ (8φIII)^{с}
aaa	15	16	9	10χIII	12345678	*a* = 1′2′3′4′5′6′7′8′	11χ (8φIII)
*a*11	15	16	10	10χIII	11′33′55′77′	*a* = 22′44′66′88′	10χ1 (8χIII)^{в}
1*aa*	15	16	11	10χIII	11′33′55′77′	*a* = 22′44′66′88′	7 (χ1) (8χIII)^{с}
aaa	15	16	12	10χIII	11′33′55′77′	*a* = 22′44′66′88′	11χ1 (8χIII)
*a*11	15	16	13	10χIII	12′34′56′78′	*a* = 1′23′45′67′8	10χ1 (10III)^{в}
1*aa*	15	16	14	10χIII	12′34′56′78′	*a* = 1′23′45′67′8	10χ2 (10III)^{с}
aaa	15	16	15	10χIII	12′34′56′78′	*a* = 1′23′45′67′8	11χ1 (10III)
*a*11	15	16	16	10χIII	12′3′456′7′8	*a* = 1′234′5′678′	8 (χ2) (4δIII)^{в}
1*aa*	15	16	17	10χIII	12′3′456′7′8	*a* = 1′234′5′678′	10χ2 (4δIII)^{с}
aaa	15	16	18	10χIII	12′3′456′7′8	*a* = 1′234′5′678′	11χ1 (4δIII)
*a*11	15	16	19	10χIII	123′4′567′8′	*a* = 1′2′345′6′78	8 (χ1) (5δIII)^{в}
1*aa*	15	16	20	10χIII	123′4′567′8′	*a* = 1′2′345′6′78	10χ2 (5δIII)^{с}
aaa	15	16	21	10χIII	123′4′567′8′	*a* = 1′2′345′6′78	11χ1 (5δIII)
V. Гексагональная сингония							
aaa	17	6	1	13φIII	$11_1 1_2$	$a = 88_1 8_2$	13φ1 (13III)
aaa	18	6	1	13αIII	$11_1 1_2$	$a = 5'5'_1 5'_2$	13α (13III)
aaa	19	6	1	16III	$11_1 1_2$	$a = 4'4'_1 4'_2$	16 (13III)
aaa	20	12	1	16αIII	$11_1 1_2 88_1 8_2$	$a = 4'4'_1 4'_2 5'5'_1 5'_2$	16α (13φIII)
aaa	20	12	2	16αIII	$11_1 1_2 4'4'_1 4'_2$	$a = 5'5'_1 5'_2 88_1 8_2$	16α1 (16III)
aaa	20	12	3	16αIII	$11_1 1_2 5'5'_1 5'_2$	$a = 4'4'_1 4'_2 88_1 8_2$	16α1 (13αIII)

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
VI. Кубическая сингония							
aaa	29	24	1	19χIII	$(12'56')_3$	$a=(1'25'6)_3$	21χ1 (19III)
aaa	30	24	1	19δIII	$(12'56')_3$	$a=(3'47'8)_3$	21δ1 (19III)
aaa	31	24	1	22III	$(12'56')_3$	$a=(34'78')_3$	(9) (19III)
aaa	32	48	1	22χIII	$(11'22'55'66')_3$	$a=(33'44'77'88')_3$	24χ1 (19χIII)
aaa	32	48	2	22χIII	$(12'3'456'7'8)_3$	$a=(1'234'5'678')_3$	24χ (19δIII)
aaa	32	48	3	22χIII	$(12'34'56'78')_3$	$a=(1'23'45'67'8)_3$	24χ1 (22III)
Системы трипараллелоэдров III порядка							
V. Гексагональная сингония							
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	1	13III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1_2}{1_1}$	$(10)\ (1\text{III})_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	2	13III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1_1}{1_2}$	$(11)\ (1\text{III})_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	1	16III	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{1_2 4'_2}{1_1 4'_1}$	$(12)\ (3\text{III})_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	2	16III	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{1_1 4'_1}{1_2 4'_2}$	$(13)\ (3\text{III})_l$
Системы трипараллелоэдров IV порядка							
II. Моноклинная сингония							
1*ab*	5	4	1	2χIII	1	$a=5',\ b=5$	$2\chi1\ (1\text{III}_2)^c$
1*ab*	5	4	2	2χIII	1	$a=5',\ b=1'$	$2\chi1\ (1\text{III}_2)^{c'}$
1*ab*	5	4	3	2χIII	1	$a=5,\ b=1'$	$2\chi1\ (1\text{III}_2)^{c''}$
*ab*1	5	4	4	2χIII	1	$a=5',\ b=5$	$2\chi1\ (1\text{III}_2)^{c'''}$
*ab*1	5	4	5	2χIII	1	$a=5',\ b=1'$	$1\ (\chi2)\ (1\text{III}_2)^c$
*ab*1	5	4	6	2χIII	1	$a=5,\ b=5'$	$1\ (\chi2)\ (1\text{III}_2)^{c'}$
*ab*1	5	4	7	2χIII	1	$a=5,\ b=1'$	$1\ (\chi2)\ (1\text{III}_2)^{c''}$
*ab*1	5	4	8	2χIII	1	$a=1'\ b=5'$	$1\ (\chi1)\ (1\text{III}_2)^c$
*ab*1	5	4	9	2χIII	1	$a=1',\ b=5$	$2\chi\ (1\text{III}_2)^c$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abb	5	4	10	2χIII	1	$a=5',\ b=5$	$2\chi1\ (1III_2)$
abb	5	4	11	2χIII	1	$a=5',\ b=1'$	$1\ (\chi2)\ (1III_2)$
abb	5	4	12	2χIII	1	$a=5,\ b=5'$	$1\ (\chi2)\ (1III_2)'$
abb	5	4	13	2χIII	1	$a=5,\ b=1'$	$1\ (\chi2)\ (1III_2)''$
abb	5	4	14	2χIII	1	$a=1',\ b=5'$	$1\ (\chi1)\ (1III_2)$
abb	5	4	15	2χIII	1	$a=1',\ b=5$	$2\chi\ (1III_2)$
aab	5	4	16	2χIII	1	$a=5',\ b=5$	$3\chi1\ (1III_2)$
aab	5	4	17	2χIII	1	$a=5',\ b=1'$	$3\chi1\ (1III_2)'$
aab	5	4	18	2χIII	1	$a=5,\ b=5'$	$3\chi1\ (1III_2)''$
aab	5	4	19	2χIII	1	$a=5,\ b=1'$	$3\chi1\ (1III_2)'''$
aab	5	4	20	2χIII	1	$a=1',\ b=5'$	$3\chi\ (1III_2)$
aab	5	4	21	2χIII	1	$a=1',\ b=5$	$3\chi\ (1III_2)'$
abc	5	4	22	2χIII	1	$a=5',\ b=5,\ c=1'$	$3\chi1\ (1III_2)^{IV}$
abc	5	4	23	2χIII	1	$a=5,\ b=5',\ c=1'$	$3\chi1\ (1III_2)^{V}$
abc	5	4	24	2χIII	1	$a=1',\ b=5',\ c=5$	$3\chi\ (1III_2)''$
$\frac{a}{a'}11$	5	4	25	2χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$	$1\ (\chi1)\ (1III_2)^{s}_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}b1$	5	4	26	2χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'},\ b=5$	$3\chi\ (1III_2)^{c}_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bb$	5	4	27	2χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'},\ b=5$	$3\chi\ (1III_2)_{1'5'}$
$1\frac{b}{b'}1$	5	4	28	2χIII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	$2\chi1\ (1III_2)^{s}_{55'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	29	2χIII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	$2\chi1\ (1III_2)^{c}_{55'}$
$1\frac{b}{b'}c$	5	4	30	2χIII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{5},\ c=1'$	$2\chi1\ (1III_2)^{c'}_{55'}$
$a\frac{b}{b'}1$	5	4	31	2χIII	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	$3\chi\ (1III_2)^{c}_{55'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	32	$2\chi III$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	$3\chi\,(1III_2)_{55'}$
$a\frac{b}{b'}a$	5	4	33	$2\chi III$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	$3\chi\,(1III_2)'_{55'}$
abb	5	4	34	$3\chi III$	1	$a=5',\ b=4'$	$1\,(\chi 2)\,(1III_3)$
abb	5	4	35	$3\chi III$	1	$a=5',\ b=8$	$1\,(\chi 2)\,(1III_3)'$
abb	5	4	36	$3\chi III$	1	$a=4',\ b=5'$	$2\chi 1\,(1III_3)$
abb	5	4	37	$3\chi III$	1	$a=4',\ b=8$	$2\chi 1\,(1III_3)'$
abb	5	4	38	$3\chi III$	1	$a=8,\ b=5'$	$1\,(\chi 2)\,(1III_3)''$
abb	5	4	39	$3\chi III$	1	$a=8,\ b=4'$	$1\,(\chi 2)\,(1III_3)'''$
$\frac{a}{a'}11$	5	4	40	$3\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'}$	$3\chi 1\,(1III_3)^{s}_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}bb$	5	4	41	$3\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'},\ b=8$	$2\chi 1\,(1III_3)_{4'5'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	5	4	42	$3\chi III$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{8}$	$1\,(\chi 2)\,(1III_3)^{c}_{5'8}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	5	4	43	$3\chi III$	1	$a=4',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{8}$	$3\chi 1\,(1III_3)_{5'8}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	44	$3\chi III$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{4'}$	$1\,(\chi 2)\,(1III_3)^{c}_{4'5'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	45	$3\chi III$	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{4'}$	$1\,(\chi 2)\,(1III_3)_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	5	4	46	$3\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'}$	$3\chi 1\,(1III_3)'_{4'5'}$

Таблица 4• (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
III. Ромбическая сингония							
$1ab$	6	4	1	4III	1	$a=5,\ b=2'$	$(2)\ (1III_4)^c$
$1ab$	6	4	2	4III	1	$a=5,\ b=6'$	$(3)\ (1III_4)^c$
$1ab$	6	4	3	4III	1	$a=2',\ b=6'$	$4\ (1III_4)^c$
$1ab$	6	4	4	4III	1	$a=6',\ b=2'$	$(2)\ (1III_4)^{c'}$
abb	6	4	5	4III	1	$a=5,\ b=2'$	$(4)\ (1III_4)$
abb	6	4	6	4III	1	$a=2',\ b=5$	$5\ (1III_4)$
abb	6	4	7	4III	1	$a=2',\ b=6'$	$(4)\ (1III_4)'$
abc	6	4	8	4III	1	$a=5,\ b=6',\ c=2'$	$6\ (1III_4)$
abc	6	4	9	4III	1	$a=5,\ b=2',\ c=6'$	$6\ (1III_4)'$
abc	6	4	10	4III	1	$a=2',\ b=5,\ c=6'$	$(5)\ (1III_4)$
$\frac{a}{a'}11$	6	4	11	4III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}$	$(3)\ (1III_4)^{8}_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}b1$	6	4	12	4III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'},\ b=5$	$5\ (1III_4)^{c}_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bb$	6	4	13	4III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'},\ b=5$	$7\ (1III_4)_{2'6'}$
abb	6	4	14	5III	1	$a=5,\ b=4'$	$(14)\ (1III_5)$
abb	6	4	15	5III	1	$a=4',\ b=5$	$(3)\ (1III_5)$
abb	6	4	16	5III	1	$a=4',\ b=8'$	$(2)\ (1III_5)$
$\frac{a}{a'}11$	6	4	17	5III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'}$	$(4)\ (1III_5)^{8}_{4'8'}$
$\frac{a}{a'}bb$	6	4	18	5III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'},\ b=5$	$(5)\ (1III_5)_{4'8'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	6	4	19	5III	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4'}{5'}$	$(2)\ (1III_5)_{4'5'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	6	4	20	5III	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4'}{5'},\ a=8'$	$(4)\ (1III_5)_{4'5'}$
$1ab$	7	4	1	2φIII	1	$a=6,\ b=2$	$2\varphi5\ (1III_4)^c$
$1ab$	7	4	2	2φIII	1	$a=6,\ b=5$	$2\varphi5\ (1III_4)^{c'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$1ab$	7	4	3	2φIII	1	$a=5,\ b=6$	$2\varphi 2\ (1III_4)^c$
$1ab$	7	4	4	2φIII	1	$a=2,\ b=6$	$2\varphi\ (1III_4)^c$
$a1b$	7	4	5	2φIII	1	$a=5,\ b=2$	$1\ (\varphi 3)\ (1III_4)^c$
$a1b$	7	4	6	2φIII	1	$a=5,\ b=6$	$1\ (\varphi 2)\ (1III_4)^c$
$a1b$	7	4	7	2φIII	1	$a=2,\ b=5$	$2\varphi 1\ (1III_4)^c$
$a1b$	7	4	8	2φIII	1	$a=2,\ b=6$	$1\ (\varphi 1)\ (1III_4)^c$
$a1b$	7	4	9	2φIII	1	$a=6,\ b=5$	$2\varphi 3\ (1III_4)^c$
$a1b$	7	4	10	2φIII	1	$a=6,\ b=2$	$1\ (\varphi 3)\ (1III_4)^{c'}$
abb	7	4	11	2φIII	1	$a=5,\ b=2$	$1\ (\varphi 5)\ (1III_4)$
abb	7	4	12	2φIII	1	$a=2,\ b=5$	$2\varphi' 1\ (1III_4)$
abb	7	4	13	2φIII	1	$a=2,\ b=6$	$1\ (\varphi 5)\ (1III_4)$
aab	7	4	14	2φIII	1	$a=5,\ b=2$	$3\varphi 3\ (1III_4)$
aab	7	4	15	2φIII	1	$a=5,\ b=6$	$3\varphi 2\ (1III_4)$
aab	7	4	16	2φIII	1	$a=2,\ b=5$	$3\varphi 1\ (1III_4)$
aab	7	4	17	2φIII	1	$a=2,\ b=6$	$3\varphi\ (1III_4)$
aab	7	4	18	2φIII	1	$a=6,\ b=5$	$3\varphi 1\ (1III_4)$
aab	7	4	19	2φIII	1	$a=6,\ b=2$	$3\varphi 3\ (1III_4)'$
abc	7	4	20	2φIII	1	$a=5,\ b=2,\ c=6$	$3\varphi'\ (1III_4)$
abc	7	4	21	2φIII	1	$a=5,\ b=6,\ c=2$	$3\varphi' 2\ (1III_4)$
abc	7	4	22	2φIII	1	$a=2,\ b=5,\ c=6$	$3\varphi' 1\ (1III_4)'$
abc	7	4	23	2φIII	1	$a=2,\ b=6,\ c=5$	$3\varphi' 2\ (1III_4)$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	24	2φIII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5}{2}$,	$2\varphi 2\ (1III_4)^{s}_{25}$
$1\frac{b}{b'}c$	7	4	25	2φIII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5}{2},\ c=6$	$2\varphi'\ (1III_4)^{c}_{25}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	26	2φIII	1	$a=6,\ \frac{b}{b'}=\frac{5}{2}$	$3\varphi 1\ (1III_4)^{c}_{25}$
$a\frac{b}{b'}a$	7	4	27	2φIII	1	$a=6,\ \frac{b}{b'}=\frac{5}{2}$	$3\varphi''\ (1III_4)$
abb	7	4	28	2φ'III	1	$a=5,\ b=4$	$1\ (\varphi 4)\ (1III_5)$
abb	7	4	29	2φ'III	1	$a=4,\ b=5$	$2\varphi 3\ (1III_5)$
abb	7	4	30	2φ'III	1	$a=4,\ b=8$	$1\ (\varphi 3)\ (1III_5)$

Т а б л и ц а 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	7	4	31	$2\varphi'III$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4}{5}$	$2\varphi5\,(1III_5)^c$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	7	4	32	$2\varphi'III$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4}{5},\ a=8$	$3\varphi3\,(1III_5)$
abb	7	4	33	$3\varphi III$	1	$a=4',\ b=1'$	$2\varphi4\,(1III_5)$
abb	7	4	34	$3\varphi III$	1	$a=4',\ b=4$	$2\varphi3\,(1III_5)$
abb	7	4	35	$3\varphi III$	1	$a=1',\ b=4'$	$1\,(\varphi2)\,(1III_5)$
abb	7	4	36	$3\varphi III$	1	$a=1',\ b=4$	$1\,(\varphi1)\,(1III_5)$
abb	7	4	37	$3\varphi III$	1	$a=4,\ b=4'$	$1\,(\varphi4)\,(1III_5)'$
abb	7	4	38	$3\varphi III$	1	$a=4,\ b=1'$	$1\,(\varphi4)\,(1III_5)''$
$\frac{a}{a'}11$	7	4	39	$3\varphi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{1'}$	$3\varphi2\,(1III_5)^{s}_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	7	4	40	$3\varphi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{1'},\ b=4$	$3\varphi'1\,(1III_5)_{1'4'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	7	4	41	$3\varphi III$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4'}{4}$	$1\,(\varphi3)\,(1III_5)^{c}_{44'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	7	4	42	$3\varphi III$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{4'}{4}$	$1\,(\varphi5)\,(1III_5)_{44'}$
$1ab$	8	8	1	$4\chi III$	$15'$	$a=26',\ b=2'6$	$2\,(\chi3)\,(1\pi III_4)^c$
$1ab$	8	8	2	$4\chi III$	$15'$	$a=26',\ b=1'5$	$2\,(\chi2)\,(1\pi III_4)^c$
$1ab$	8	8	3	$4\chi III$	$15'$	$a=1'5,\ b=26'$	$3\,(\chi3)\,(1\pi III_4)^c$
$1ab$	8	8	4	$4\chi III$	$15'$	$a=2'6,\ b=26'$	$4\chi2\,(1\pi III_4)^c$
abb	8	8	5	$4\chi III$	$15'$	$a=1'5,\ b=2'6$	$4\,(\chi1)\,(1\pi III_4)$
abb	8	8	6	$4\chi III$	$15'$	$a=2'6,\ b=1'5$	$5\chi3\,(1\pi III_4)$
abb	8	8	7	$4\chi III$	$15'$	$a=2'6,\ b=26'$	$4\,(\chi2)\,(1\pi III_4)$
abc	8	8	8	$4\chi III$	$15'$	$a=1'5,\ b=26',\ c=2'6$	$6\chi\,(1\pi III_4)$
abc	8	8	9	$4\chi III$	$15'$	$a=1'5,\ b=2'6,\ c=26'$	$6\chi1\,(1\pi III_4)$
abc	8	8	10	$4\chi III$	$15'$	$a=2'6,\ b=1'5,\ c=26'$	$5\,(\chi2)\,(1\pi III_4)$
$1ab$	8	8	11	$4\chi III$	15	$a=1'5',\ b=26$	$2\,(\chi2)\,(2III_4)^c$
$1ab$	8	8	12	$4\chi III$	15	$a=1'5',\ b=2'6'$	$3\,(\chi3)\,(2III_4)^c$

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$1ab$	8	8	13	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=2'6'$	$3(\chi 2)(2\text{III}_4)^c$
$a1b$	8	8	14	$4\chi\text{III}$	15	$a=1'5',\ b=26$	$3(\chi 1)(2\text{III}_4)^c$
$a1b$	8	8	15	$4\chi\text{III}$	15	$a=1'5',\ b=2'6'$	$3(\chi 2)(2\text{III}_4)^{c'}$
$a1b$	8	8	16	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=1'5'$	$3(\chi 3)(2\text{III}_4)^c$
$a1b$	8	8	17	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=2'6'$	$3(\chi 3)(2\text{III}_4)^{c'}$
$a1b$	8	8	18	$4\chi\text{III}$	15	$a=2'6',\ b=1'5'$	$4\chi 2(2\text{III}_4)^c$
$a1b$	8	8	19	$4\chi\text{III}$	15	$a=2'6',\ b=26$	$4\chi 1(2\text{III}_4)^c$
abb	8	8	20	$4\chi\text{III}$	15	$a=1'5',\ b=26$	$5\chi(2\text{III}_4)$
abb	8	8	21	$4\chi\text{III}$	15	$a=1'5',\ b=2'6'$	$5\chi 1(2\text{III}_4)$
abb	8	8	22	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=1'5'$	$5\chi 3(2\text{III}_4)$
abb	8	8	23	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=2'6'$	$5\chi 3(2\text{III}_4)'$
abb	8	8	24	$4\chi\text{III}$	15	$a=2'6',\ b=1'5'$	$5\chi 3(2\text{III}_4)''$
abb	8	8	25	$4\chi\text{III}$	15	$a=2'6',\ b=26$	$5\chi 2(2\text{III}_4)$
aab	8	8	26	$4\chi\text{III}$	15	$a=1'5',\ b=26$	$4(\chi 1)(2\text{III}_4)$
aab	8	8	27	$4\chi\text{III}$	15	$a=1'5',\ b=2'6'$	$4(\chi 2)(2\text{III}_4)$
aab	8	8	28	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=1'5'$	$4(\chi 2)(2\text{III}_4)'$
aab	8	8	29	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=2'6'$	$4(\chi 2)(2\text{III}_4)''$
aab	8	8	30	$4\chi\text{III}$	15	$a=2'6',\ b=1'5'$	$5\chi 3(2\text{III}_4)'''$
aab	8	8	31	$4\chi\text{III}$	15	$a=2'6',\ b=26$	$5\chi 1(2\text{III}_4)'$
abc	8	8	32	$4\chi\text{III}$	15	$a=1'5',\ b=26,\ c=2'6'$	$5(\chi 1)(2\text{III}_4)$
abc	8	8	33	$4\chi\text{III}$	15	$a=26,\ b=1'5',\ c=2'6'$	$5(\chi 2)(2\text{III}_4)$
abc	8	8	34	$4\chi\text{III}$	15	$a=2'6',\ b=1'5',\ c=26$	$4\chi 1(2\text{III}_4)$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	35	$4\chi\text{III}$	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{2'6'}$	$4\chi 1(2\text{III}_4)^{s}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	36	$4\chi\text{III}$	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{2'6'},\ b=26$	$5\chi 2(2\text{III}_4)^{c}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	37	$4\chi\text{III}$	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{2'6'},\ b=26$	$5\chi(2\text{III}_4)_{1'2'}$
$1ab$	8	8	38	$4\chi\text{III}$	11'	$a=55',\ b=22'$	$2(\chi 1)(1\chi\text{III}_4)^c$
$1ab$	8	8	39	$4\chi\text{III}$	11'	$a=55',\ b=66'$	$3(\chi 1)(1\chi\text{III}_4)^c$
$1ab$	8	8	40	$4\chi\text{III}$	11'	$a=22',\ b=66'$	$4\chi(1\chi\text{III}_4)^c$
$1ab$	8	8	41	$4\chi\text{III}$	11'	$a=66',\ b=22'$	$2(\chi 1)(1\chi\text{III}_4)^{c'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a1b$	8	8	42	$4\chi III$	$11'$	$a=55',\ b=22'$	$2(\chi 2)(1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	43	$4\chi III$	$11'$	$a=55',\ b=66'$	$2(\chi 3)(1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	44	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=55'$	$4\chi 1(1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	45	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=66'$	$3(\chi 1)(1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	46	$4\chi III$	$11'$	$a=66',\ b=55'$	$3(\chi 2)(1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	47	$4\chi III$	$11'$	$a=66',\ b=22'$	$2(\chi 2)(1\chi III_4)^{c'}$
abb	8	8	48	$4\chi III$	$11'$	$a=55',\ b=22'$	$4(\chi 1)(1\chi III_4)$
abb	8	8	49	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=55'$	$5\chi 1(1\chi III_4)$
abb	8	8	50	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=66'$	$4(\chi 1)(1\chi III_4)'$
aab	8	8	51	$4\chi III$	$11'$	$a=55',\ b=22'$	$4(\chi 2)(1\chi III_4)$
aab	8	8	52	$4\chi III$	$11'$	$a=55',\ b=66'$	$4(\chi 1)(1\chi III_4)''$
aab	8	8	53	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=55'$	$5\chi 2(1\chi III_4)$
aab	8	8	54	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=66'$	$5\chi(1\chi III_4)$
aab	8	8	55	$4\chi III$	$11'$	$a=66',\ b=55'$	$4(\chi 2)(1\chi III_4)'$
aab	8	8	56	$4\chi III$	$11'$	$a=66',\ b=22'$	$4(\chi 2)(1\chi III_4)''$
abc	8	8	57	$4\chi III$	$11'$	$a=55',\ b=22',\ c=66'$	$6\chi(1\chi III_4)$
abc	8	8	58	$4\chi III$	$11'$	$a=55',\ b=66',\ c=22'$	$6\chi 1(1\chi III_4)$
abc	8	8	59	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=55',\ c=66'$	$5(\chi 1)(1\chi III_4)$
abc	8	8	60	$4\chi III$	$11'$	$a=22',\ b=66',\ c=55'$	$6\chi 1(1\chi III_4)'$
$1\frac{b}{b'}1$	8	8	61	$4\chi III$	$11'$	$\frac{b}{b'}=\frac{55'}{22'}$	$3(\chi 1)(1\chi III_4)^{c}_{25}$
$1\frac{b}{b'}c$	8	8	62	$4\chi III$	$11'$	$\frac{b}{b'}=\frac{55'}{22'},\ c=66'$	$5\chi(1\chi III_4)^{c}_{25}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	63	$4\chi III$	$11'$	$a=66',\ \frac{b}{b'}=\frac{55'}{22'}$	$5\chi 2(1\chi III_4)^{c}_{25}$
$a\frac{b}{b'}a$	8	8	64	$4\chi III$	$11'$	$a=66',\ \frac{b}{b'}=\frac{55'}{22'}$	$7\chi(1\chi III_4)_{25}$
abb	8	8	65	$5\chi III$	$15'$	$a=1'5,\ b=48'$	$14(\chi 1)(1\chi III_5)$
abb	8	8	66	$5\chi III$	$15'$	$a=48',\ b=1'5$	$3(\chi 4)(1\chi III_5)$
abb	8	8	67	$5\chi III$	$15'$	$a=48',\ b=4'8$	$2(\chi 5)(1\chi III_5)$
abb	8	8	68	$5\chi III$	15	$a=1'5',\ b=4'8'$	$2(\chi 4)(2III_5)$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
abb	8	8	69	$5\chi III$	15	$a=1'5',\ b=48$	$2(\chi 1)(2III_5)$
abb	8	8	70	$5\chi III$	15	$a=4'8',\ b=1'5'$	$4\chi 3(2III_5)$
abb	8	8	71	$5\chi III$	15	$a=4'8',\ b=48$	$4\chi 2(2III_5)$
abb	8	8	72	$5\chi III$	15	$a=48,\ b=1'5'$	$2(\chi 6)(2III_5)$
abb	8	8	73	$5\chi III$	15	$a=48,\ b=4'8'$	$2(\chi 6)(2III_5)'$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	74	$5\chi III$	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{4'8'}$	$5\chi 1(2III_5)^{c}_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	75	$5\chi III$	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{4'8'},\ b=48$	$6\chi 1(2III_5)_{1'4'}$
abb	8	8	76	$5\chi III$	14′	$a=1'4,\ b=58'$	$3(\chi 2)(3III_5)$
abb	8	8	77	$5\chi III$	14′	$a=1'4,\ b=5'8$	$2(\chi 2)(3III_5)$
abb	8	8	78	$5\chi III$	14′	$a=58'.\ b=1'4$	$3(\chi 4)(3III_5)$
abb	8	8	79	$5\chi III$	14′	$a=58',\ b=5'8$	$3(\chi 4)(3III_5)'$
abb	8	8	80	$5\chi III$	14′	$a=5'8,\ b=1'4$	$2(\chi 5)(3III_5)$
abb	8	8	81	$5\chi III$	14′	$a=5'8,\ b=58'$	$3(\chi 4)(3III_5)''$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	82	$5\chi III$	14′	$\frac{b}{b'}=\frac{5'8}{58'}$	$3(\chi 4)(3III_5)^{c}_{55'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	83	$5\chi III$	14′	$a=1'4,\ \frac{b}{b'}=\frac{5'8}{58'}$	$4(\chi 2)(3III_5)_{55'}$
abb	8	8	84	$5\chi III$	11′	$a=55',\ b=44'$	$14(\chi 1)(1\chi III_5)$
abb	8	8	85	$5\chi III$	11′	$a=44',\ b=55'$	$3(\chi 2)(1\chi III_5)$
abb	8	8	86	$5\chi III$	11′	$a=44',\ b=88'$	$2(\chi 2)(1\chi III_5)$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	87	$5\chi III$	11′	$\frac{b}{b'}=\frac{44'}{55'}$	$2(\chi 1)(1\chi III_5)^{c}_{45}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	88	$5\chi III$	11′	$a=88',\ \frac{b}{b'}=\frac{44'}{55'}$	$3(\chi 2)(1\chi III_5)_{45}$
abb	8	8	89	$5\chi III$	18	$a=4'5',\ b=45$	$3(\chi 2)(1\chi' III_5)$
abb	8	8	90	$5\chi III$	18	$a=4'5',\ b=1'8'$	$2(\chi 4)(1\chi' III_5)$
abb	8	8	91	$5\chi III$	18	$a=45,\ b=4'5'$	$14(\chi 1)(1\chi' III_5)$
abb	8	8	92	$5\chi III$	18	$a=45,\ b=1'8'$	$14(\chi 1)(1\chi' III_5)$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
abb	8	8	93	5χIII	18	$a=1'8',\ b=4'5'$	$2(\chi 3)(1\chi' III_5)$
abb	8	8	94	5χIII	18	$a=1'8',\ b=45$	$3(\chi 1)(1\chi' III_5)$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	95	5χIII	18	$\frac{a}{a'}=\frac{4'5'}{1'8'}$	$4(\chi 1)(1\chi' III_5)^s_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	96	5χIII	18	$\frac{a}{a'}=\frac{4'5'}{1'8'},\ b=45$	$5(\chi 1)(1\chi' III_5)_{1'4'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	97	5χIII	18	$\frac{b}{b'}=\frac{4'5'}{45}$	$2(\chi 2)(1\chi' III_5)^c_{44'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	98	5χIII	18	$a=1'8',\ \frac{b}{b'}=\frac{4'5'}{45}$	$4(\chi 1)(1\chi' III_5)_{44'}$
IV. Тетрагональная сингония							
$1bc$	9	4	1	8III	1	$b=3,\ c=7$	$8(1III)^c$
abc	9	4	2	8III	1	$a=5,\ b=3,\ c=7$	$9(1III)$
$\frac{a}{a'}11$	9	4	3	8III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3}$	$(15)(1III)^s_r$
$\frac{a}{a'}11$	9	4	4	8III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7}$	$(16)(1III)^s_l$
$\frac{a}{a'}bb$	9	4	5	8III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3},\ b=5$	$(17)(1III)_r$
$\frac{a}{a'}bb$	9	4	6	8III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7},\ b=5$	$(17)(1III)_l$
abb	10	8	1	8φIII	15	$a=37,\ b=26$	$6(\varphi 3)(3III)$
abb	10	8	2	8φIII	15	$a=37,\ b=48$	$6(\varphi 4)(3III)$
abb	10	8	3	8φIII	15	$a=26,\ b=37$	$8\varphi 3(3III)$
abb	10	8	4	8φIII	15	$a=26,\ b=48$	$6(\varphi 4)(3III)'$
abb	10	8	5	8φIII	15	$a=48,\ b=37$	$8\varphi 1(3III)$
abb	10	8	6	8φIII	15	$a=48,\ b=26$	$6(\varphi 2)(3III)$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$1bc$	10	8	7	8φIII	18	$b=23,\ c=67$	$8\varphi\,(1\chi'\mathrm{III})^c$
$1bc$	10	8	8	8φIII	18	$b=67,\ c=23$	$8\varphi2\,(1\chi'\mathrm{III})^c$
abc	10	8	9	8φIII	18	$a=45,\ b=23,\ c=67$	$9\varphi\,(1\chi'\mathrm{III})$
abc	10	8	10	8φIII	18	$a=45,\ b=67,\ c=23$	$9\varphi1\,(1\chi'\mathrm{III})$
$1bc$	11	4	1	2πIII	1	$b=3',\ c=7'$	$2\pi\,(1\mathrm{III})^c$
abc	11	4	2	2πIII	1	$a=5,\ b=3',\ c=7'$	$3\pi\,(1\mathrm{III})$
abc	12	8	1	8χIII	15′	$a=1'5,\ b=37',\ c=3'7$	$9\chi\,(1\pi\mathrm{III})$
abb	12	8	2	8χIII	15	$a=37,\ b=1'5'$	$6\,(\chi2)\,(2\mathrm{III})$
abb	12	8	3	8χIII	15	$a=37,\ b=3'7'$	$6\,(\chi2)\,(2\mathrm{III})'$
abb	12	8	4	8χIII	15	$a=1'5',\ b=37$	$8\chi\,(2\mathrm{III})$
abb	12	8	5	8χIII	15	$a=1'5',\ b=3'7'$	$6\,(\chi1)\,(2\mathrm{III})$
abb	12	8	6	8χIII	15	$a=3'7',\ b=37$	$8\chi1\,(2\mathrm{III})$
abb	12	8	7	8χIII	15	$a=3'7',\ b=1'5'$	$6\,(\chi2)\,(2\mathrm{III})''$
$\frac{a}{a'}\,11$	12	8	8	8χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{1'5'}$	$6\,(\chi1)\,(2\mathrm{III})^{s}_{1'3'}$
$\frac{a}{a'}\,bb$	12	8	9	8χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{1'5'},\ b=37$	$9\chi\,(2\mathrm{III})_{1'3'}$
$1bc$	12	8	10	8χIII	11′	$b=33',\ c=77'$	$8\chi\,(1\chi\mathrm{III})$
abc	12	8	11	8χIII	11′	$a=55',\ b=33',\ c=77'$	$9\chi\,(1\chi\mathrm{III})$
abb	13	8	1	10III	15	$a=37,\ b=2'6'$	$(18)\,(2\mathrm{III})$
abb	13	8	2	10III	15	$a=37,\ b=4'8'$	$(18)\,(2\mathrm{III})'$
abb	13	8	3	10III	15	$a=2'6',\ b=37$	$(7)\,(2\mathrm{III})$
abb	13	8	4	10III	15	$a=2'6',\ b=4'8'$	$(18)\,(2\mathrm{III})''$
abb	13	8	5	10III	15	$a=4'8',\ b=37$	$10\,(2\mathrm{III})$
abb	13	8	6	10III	15	$a=4'8',\ b=2'6'$	$(8)\,(2\mathrm{III})$
$\frac{a}{a'}\,11$	13	8	7	10III	15	$\frac{a}{a'}=\frac{2'6'}{4'8'}$	$(8)\,(2\mathrm{III})^{s}_{2'4'}$
$\frac{a}{a'}\,bb$	13	8	8	10III	15	$\frac{a}{a'}=\frac{2'6'}{4'8'},\ b=37$	$11\,(2\mathrm{III})_{2'4'}$
$\frac{a}{a'}\,11$	13	8	9	10III	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{78'}{34'}$	$(19)\,(2\mathrm{III})^{s}_{r}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$\frac{a}{a'}11$	13	8	10	10III	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{34'}{78'}$	$(20)\ (2III)^{s}_{l}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	11	10III	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{78'}{34'},\ b=2'6$	$(21)\ (2III)_{r}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	12	10III	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{34'}{78'},\ b=2'6$	$(21)\ (2III)_{l}$
$1bc$	13	8	13	10III	14′	$b=36',\ c=2'7$	$(7)\ (3III)^{c}$
$1bc$	13	8	14	10III	14′	$b=2'7,\ c=36'$	$10\ (3III)^{c}$
abc	13	8	15	10III	14′	$a=58',\ b=36',\ c=2'7$	$11\ (3III)$
abc	13	8	16	10III	14′	$a=58',\ b=2'7,\ c=36'$	$11\ (3III)'$
$\frac{a}{a'}11$	13	8	17	10III	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{2'7}{36'}$	$(19)\ (3III)^{s}_{r}$
$\frac{a}{a'}11$	13	8	18	10III	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{36'}{2'7}$	$(20)\ (3III)^{s}_{l}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	19	10III	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{2'7}{36'},\ b=58'$	$(21)\ (3III)_{r}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	20	10III	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{36'}{2'7},\ b=58'$	$(21)\ (3III)_{l}$
abb	14	8	1	4δIII	15	$a=3'7',\ b=2'6'$	5δ3 (2III)
abb	14	8	2	4δIII	15	$a=3'7',\ b=48$	5δ2 (2III)
abb	14	8	3	4δIII	15	$a=2'6',\ b=3'7'$	5δ3 (2III)′
abb	14	8	4	4δIII	15	$a=2'6',\ b=48$	5δ2 (2III)′
abb	14	8	5	4δIII	15	$a=48,\ b=3'7'$	5δ1 (2III)
abb	14	8	6	4δIII	15	$a=48,\ b=2'6'$	5δ1 (2III)′
$\frac{a}{a'}11$	14	8	7	4δIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{2'6'}$	$4\delta 1\ (2III)^{s}_{2',3'}$
$\frac{a}{a'}bb$	14	8	8	4δIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{2'6'},\ b=48$	$5\delta 2\ (2III)_{2'3'}$
$1bc$	14	8	9	4δIII	18	$b=2'3',\ c=6'7'$	$4\delta\ (1\chi'III)^{c}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
1bc	14	8	10	4δIII	18	*b* = 6′7′, *c* = 2′3′	2 (δ1) (1χ′III)*c*
abc	14	8	11	4δIII	18	*a* = 45, *b* = 2′3′, *c* = 6′7′	6δ (1χ′III)
abc	14	8	12	4δIII	18	*a* = 45, *b* = 6′7′, *c* = 2′3′	6δ (1χ′III)′
abb	14	8	13	5δIII	15	*a* = 3′7′, *b* = 26	2 (δ1) (2III)
abb	14	8	14	5δIII	15	*a* = 3′7′, *b* = 4′8′	2 (δ2) (2III)
abb	14	8	15	5δIII	15	*a* = 26, *b* = 3′7′	2 (δ2) (2III)′
abb	14	8	16	5δIII	15	*a* = 26, *b* = 4′8′	2 (δ2) (2III)″
abb	14	8	17	5δIII	15	*a* = 4′8′, *b* = 3′7′	4δ1 (2III)
abb	14	8	18	5δIII	15	*a* = 4′8′, *b* = 26	4δ (2III)
1bc	14	8	19	5δIII	14′	*b* = 23′, *c* = 67′	5δ (3III)*c*
1bc	14	8	20	5δIII	14′	*b* = 67′, *c* = 23′	5δ1 (3III)*c*
abc	14	8	21	5δIII	14′	*a* = 58′, *b* = 23′, *c* = 67′	7δ (3III)
abc	14	8	22	5δIII	14′	*a* = 58′, *b* = 67′, *c* = 23′	7δ1 (3III)
abb	15	16	1	10χIII	11′55′	*a* = 33′77′, *b* = 22′66′	18 (χ1) (2χIII)
abb	15	16	2	10χIII	11′55′	*a* = 33′77′, *b* = 44′88′	18 (χ3) (2χIII)
abb	15	16	3	10χIII	11′55′	*a* = 22′66′, *b* = 33′77′	7 (χ1) (2χIII)
abb	15	16	4	10χIII	11′55′	*a* = 22′66′, *b* = 44′88′	18 (χ3) (2χIII)
abb	15	16	5	10χIII	11′55′	*a* = 44′88′, *b* = 33′77′	10χ1 (2χIII)
abb	15	16	6	10χIII	11′55′	*a* = 44′88′, *b* = 22′66′	8 (χ2) (2χIII)
1bc	15	16	7	10χIII	14′5′8	*b* = 236′7′, *c* = 2′3′67	10χ2 (3χIII)*c*
1bc	15	16	8	10χIII	14′5′8	*b* = 2′3′67, *c* = 236′7′	7 (χ2) (3χIII)*c*
abc	15	16	9	10χIII	14′5′8	*a* = 1′458′, *b* = 236′7′, *c* = 2′3′67	11χ1 (3χIII)
abc	15	16	10	10χIII	14′5′8	*a* = 1′458′, *b* = 2′3′67, *c* = 236′7′	11χ (3χIII)
abb	15	16	11	10χIII	12′56′	*a* = 1′25′6, *b* = 34′78′	7 (χ3) (4III)
abb	15	16	12	10χIII	12′56′	*a* = 1′25′6, *b* = 3′47′8	18 (χ3) (4III)
abb	15	16	13	10χIII	12′56′	*a* = 34′78′, *b* = 1′25′6	8 (χ3) (4III)
abb	15	16	14	10χIII	12′56′	*a* = 34′78′, *b* = 3′47′8	8 (χ4) (4III)
abb	15	16	15	10χIII	12′56′	*a* = 3′47′8, *b* = 1′25′6	18 (χ2) (4III)
abb	15	16	16	10χIII	12′56′	*a* = 3′47′8, *b* = 34′78′	7 (χ4) (4III)
abb	15	16	17	10χIII	14′58′	*a* = 1′45′8, *b* = 2′36′7	10χ1 (5III)
abb	15	16	18	10χIII	14′58′	*a* = 1′45′8, *b* = 23′67′	8 (χ2) (5III)
abb	15	16	19	10χIII	14′58′	*a* = 2′36′7, *b* = 1′45′8	8 (χ4) (5III)

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abb	15	16	20	10χIII	14′58′	$a=2'36'7,\ b=23'67'$	$8(\chi3)$ (5III)
abb	15	16	21	10χIII	14′58′	$a=23'67',\ b=1'45'8$	$8(\chi4)$ (5III)′
abb	15	16	22	10χIII	14′58′	$a=23'67',\ b=2'36'7$	$10\chi3$ (5III)
abb	15	16	23	10χIII	1256	$a=1'2'5'6',\ b=3478$	$7(\chi1)$ $(2\varphi$III)
abb	15	16	24	10χIII	1256	$a=1'2'5'6',\ b=3'4'7'8'$	$18(\chi1)$ $(2\varphi$III)
abb	15	16	25	10χIII	1256	$a=3478,\ b=1'2'5'6'$	$18(\chi2)$ $(2\varphi$III)
abb	15	16	26	10χIII	1256	$a=3478,\ b=3'4'7'8'$	$18(\chi2)$ $(2\varphi$III)′
abb	15	16	27	10χIII	1256	$a=3'4'7'8',\ b=1'2'5'6'$	$8(\chi3)$ $(2\varphi$III)
abb	15	16	28	10χIII	1256	$a=3'4'7'8',\ b=3478$	$10\chi2$ $(2\varphi$III)
$\frac{a}{a'}11$	15	16	29	10χIII	1256	$\frac{a}{a'}=\frac{1'2'5'6'}{3'4'7'8'}$	$8(\chi2)(2\varphi\mathrm{III})^{8}_{1'3'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	30	10χIII	1256	$\frac{a}{a'}=\frac{1'2'5'6'}{3'4'7'8'},\ b=3478$	$11\chi1(2\varphi\mathrm{III})_{1'3'}$
abb	15	16	31	10χIII	1458	$a=1'4'5'8',\ b=2367$	10χ $(2\varphi'$III)
abb	15	16	32	10χIII	1458	$a=1'4'5'8',\ b=2'3'6'7'$	$8(\chi1)$ $(2\varphi'$III)
abb	15	16	33	10χIII	1458	$a=2367,\ b=1'4'5'8'$	$18(\chi4)$ $(2\varphi'$III)
abb	15	16	34	10χIII	1458	$a=2367,\ b=2'3'6'7'$	$18(\chi2)$ $(2\varphi'$III)
abb	15	16	35	10χIII	1458	$a=2'3'6'7',\ b=1'4'5'8'$	$18(\chi4)$ $(2\varphi'$III)′
abb	15	16	36	10χIII	1458	$a=2'3'6'7',\ b=2367$	10χ $(2\varphi'$III)′
$\frac{a}{a'}11$	15	16	37	10χIII	1458	$\frac{a}{a'}=\frac{1'4'5'8'}{2'3'6'7'}$	$8(\chi1)(2\varphi'\mathrm{III})^{8}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	38	10χIII	1458	$\frac{a}{a'}=\frac{1'4'5'8'}{2'3'6'7'},\ b=2367$	$11\chi1(2\varphi'\mathrm{III})_{1'2'}$
1bc	15	16	39	10χIII	11′44′	$b=33'66',\ c=22'77'$	$7(\chi1)(3\varphi\mathrm{III})^{c}$
1bc	15	16	40	10χIII	11′44′	$b=22'77',\ c=33'66'$	$10\chi(3\varphi\mathrm{III})^{c}$
abc	15	16	41	10χIII	11′44′	$a=55'88',\ b=33'66',$ $c=22'77'$	$11\chi1$ $(3\varphi$III)
abc	15	16	42	10χIII	11′44′	$a=55'88',\ b=22'77',$ $c=33'66'$	11χ $(3\varphi$III)
abb	15	16	43	10χIII	1357	$a=1'3'5'7',\ b=2468$	$7(\chi1)$ (8III)
abb	15	16	44	10χIII	1357	$a=1'3'5'7',\ b=2'4'6'8'$	$7(\chi3)$ (8III)

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abb	15	16	45	10χIII	1357	$a = 2468,\ b = 1'3'5'7'$	$7(\chi4)$ (8III)
abb	15	16	46	10χIII	1357	$a = 2468,\ b = 2'4'6'8'$	$7(\chi4)$ (8III)$'$
abb	15	16	47	10χIII	1357	$a = 2'4'6'8',\ b = 1'3'5'7'$	$10\chi3$ (8III)
abb	15	16	48	10χIII	1357	$a = 2'4'6'8',\ b = 2468$	$10\chi2$ (8III)
$\frac{a}{a'}11$	15	16	49	10χIII	1357	$\frac{a}{a'} = \frac{1'3'5'7'}{2'4'6'8'}$	$10\chi1$ (8III)$^{*}_{1'2'}$
$\frac{a}{a}bb$	15	16	50	10χIII	1357	$\frac{a}{a'} = \frac{1'3'5'7'}{2'4'6'8'},\ b = 2468$	$11\chi1$ (8III)$_{1'2'}$
abb	15	16	51	10χIII	$13'57'$	$a = 1'35'7,\ b = 24'68'$	$18(\chi1)$ $(2\pi$III)
abb	15	16	52	10χIII	$13'57'$	$a = 1'35'7,\ b = 2'46'8$	$18(\chi3)$ $(2\pi$III)
abb	15	16	53	10χIII	$13'57'$	$a = 24'68',\ b = 1'35'7$	$10\chi3$ $(2\pi$III)
abb	15	16	54	10χIII	$13'57'$	$a = 24'68',\ b = 2'46'8$	$8(\chi4)$ $(2\pi$III)
abb	15	16	55	10χIII	$13'57'$	$a = 2'46'8,\ b = 1'35'7$	$7(\chi4)$ $(2\pi$III)
abb	15	16	56	10χIII	$13'57'$	$a = 2'46'8,\ b = 24'68'$	$18(\chi2)$ $(2\pi$III)
V. Гексагональная сингония							
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	20	12	1	16δIII	$11_1 1_2$	$\frac{a}{a'} = \frac{5'5_1'5_2'}{4'4_1'4_2'}$	$14\alpha1$ (13III)$_{1'5'}$
VI. Кубическая сингония							
$a\,a_1a_2$	28	12	1	19III	$1\,1_1 1_2 = (1)_3$	$a = 2_2'5_1 6'$, $a_1 = 2'5_2 6_1',\ a_2 = 2_1'56_2'$	(22) (13III)
aa_1a_2	28	12	2	19III	$11_1 1_2 = (1)_3$	$a = 2_1'56_2'$, $a_1 = 2_2'5_1 6',\ a_2 = 2'5_2 6_1'$	(20) (13III)
$a\,a_1a_2$	29	24	1	19χIII	$11_1 1_2 5'5_1'5_2' = (15')_3$	$a = 1'2_2 2_1'56_1 6_2'$, $a_1 = 1_1'22_2'5_1 6_2 6'$, $a_2 = 1_2'2_1 2'5_2 66_1'$	20χ $(13\pi$III)
aa_1a_2	29	24	2	19χIII	$11_1 1_2 5_1'5_1'5_2' = (15')_3$	$a = 1_1'22_2'5_1 6_2 6'$, $a_1 = 1_2'2_1 2'5_2 66_1'$, $a_2 = 1'2_2 2_1'56_1 6_2'$	$22(\chi1)$ $(13\pi$III)

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
aa_1a_2	30	24	1	19δIII	$(18)_3$	$a=2'_1 3'_1 4 5 6'_2 7'_2$, $a_1=2'_2 3'_2 4_1 5_1 6' 7'$, $a_2=2' 3' 4_2 5_2 6'_1 7'_1$	20δ (13φIII)
aa_1a_2	31	24	1	22III	$(14')_3$	$a=2'_1 3_2 5 6'_2 7_1 8'$, $a_1=2'_2 3 5_1 6' 7_2 8'_1$, $a_2=2' 3_1 5_2 6'_1 7 8'_2$	23 (16III)
aa_1a_2	32	48	1	22χIII	$(14'5'8)_3$	$a=1' 2_2 2'_1 3_2 3'_1 4 5 6_1 6'_2 7_1 7'_2 8'$, $a_1=1'_1 2 2'_2 3 3'_2 4_1 5_1 6_2 6' 7_2 7' 8'_1$, $a_2=1'_2 2_1 2' 3_1 3' 4_2 5_2 6 6'_1 7 7'_1 8'_2$	23χ (16δIII)

Системы трипараллелоэдров VI порядка

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Явная симметрия	Симметрия связи	Символ системы
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	1	16III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{4'_1}$	$(26)\,(1III)_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	2	16III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{4'_2}$	$(27)\,(1III)_l$

Системы трипараллелоэдров VIII порядка

III. Ромбическая сингония

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Явная симметрия	Симметрия связи	Символ системы
abc	8	8	1	4χIII	1	$a=1',\ b=2,\ c=6$	$4\chi\,(1III_4)$
abc	8	8	2	4χIII	1	$a=5',\ b=2,\ c=6$	$2\,(\chi 3)\,(1III_4)$
abc	8	8	3	4χIII	1	$a=2',\ b=2,\ c=6$	$3\,(\chi 1)\,(1III_4)$
abc	8	8	4	4χIII	1	$a=1',\ b=5',\ c=2'$	$14\,(\chi 1)\,(1III_4)$
abc	8	8	5	4χIII	1	$a=1',\ b=5',\ c=6'$	$2\,(\chi 2)\,(1III_4)$
abc	8	8	6	4χIII	1	$a=1',\ b=6',\ c=2'$	$2\,(\chi 4)\,(1III_4)$
abc	8	8	7	4χIII	1	$a=1',\ b=5,\ c=6'$	$3\,(\chi 2)\,(1III_4)$
abc	8	8	8	4χIII	1	$a=1',\ b=5,\ c=2'$	$2\,(\chi 4)\,(1III_4)'$
abc	8	8	9	4χIII	1	$a=1',\ b=2',\ c=6'$	$4\chi 1\,(1III_4)$
abc	8	8	10	4χIII	1	$a=5',\ b=6',\ c=2'$	$2\,(\chi 6)\,(1III_4)$
abc	8	8	11	4χIII	1	$a=5',\ b=5,\ c=2'$	$2\,(\chi 5)\,(1III_4)$
abc	8	8	12	4χIII	1	$a=5',\ b=5,\ c=6'$	$3\,(\chi 4)\,(1III_4)$
abc	8	8	13	4χIII	1	, $a=5',\ b=2',\ c=6'$	$4\chi 3\,(1III_4)$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
abc	8	8	14	4χIII	1	$a=1', b=6, c=2$	$2(\chi1)(1III_4)$
abc	8	8	15	4χIII	1	$a=1', b=6, c=5'$	$14(\chi1)(1III_4)'$
abc	8	8	16	4χIII	1	$a=1', b=6, c=2'$	$14(\chi1)(1III_4)''$
abc	8	8	17	4χIII	1	$a=1', b=6, c=5$	$2(\chi1)(1III_4)'$
abc	8	8	18	4χIII	1	$a=5', b=6, c=1'$	$2(\chi5)(1III_4)'$
abc	8	8	19	4χIII	1	$a=5', b=6, c=2$	$4\chi2(1III_4)$
abc	8	8	20	4χIII	1	$a=5', b=6, c=5$	$3(\chi3)(1III_4)$
abc	8	8	21	4χIII	1	$a=5', b=6, c=6'$	$3(\chi4)(1III_4)'$
abc	8	8	22	4χIII	1	$a=5', b=1', c=2'$	$14(\chi2)(1III_4)$
abc	8	8	23	4χIII	1	$a=5', b=1', c=6'$	$2(\chi6)(1III_4)'$
abc	8	8	24	4χIII	1	$a=6, b=1', c=2$	$14(\chi2)(1III_4)'$
abc	8	8	25	4χIII	1	$a=2', b=6, c=2$	$3(\chi3)(1III_4)''$
abc	8	8	26	4χIII	1	$a=5, b=6, c=1'$	$14(\chi2)(1III_4)''$
abc	8	8	27	4χIII	1	$a=2', b=6, c=1'$	$2(\chi5)(1III_4)''$
abc	8	8	28	4χIII	1	$a=5, b=2', c=1'$	$2(\chi6)(1III_4)''$
abc	8	8	29	4χIII	1	$a=6', b=2', c=1'$	$3(\chi3)(1III_4)'$
abc	8	8	30	4χIII	1	$a=2', b=5, c=1'$	$3(\chi4)(1III_4)''$
abc	8	8	31	4χIII	1	$a=6', b=5, c=1'$	$4\chi2(1III_4)'$
abc	8	8	32	4χIII	1	$a=2', b=6', c=1'$	$2(\chi5)(1III_4)'''$
abc	8	8	33	4χIII	1	$a=5, b=6', c=1'$	$2(\chi5)(1III_4)^{IV}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	34	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}, b=2$	$3(\chi2)(1III_4)^{c}_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	35	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}, b=6$	$3(\chi3)(1III_4)^{c}_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	36	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}, b=2, c=5$	$5\chi1(1III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	37	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}, b=6, c=5$	$5\chi3(1III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	38	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}, b=2, c=2$	$4(\chi2)(1III_4)_{2'6'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	39	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}$, $b=2$, $c=6$	$5(\chi 1)(1\text{III}_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	40	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}$, $b=6$, $c=2$	$5(\chi 2)(1\text{III}_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	41	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$, $b=2$	$2(\chi 3)(1\text{III}_4)^{c}_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	42	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$, $b=6$	$2(\chi 2)(1\text{III}_4)^{c}_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	43	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$, $b=2$, $c=5$	$4(\chi 1)(1\text{III}_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	44	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$, $b=6$, $c=5$	$4(\chi 2)(1\text{III}_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	45	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$, $b=2$, $c=2$	$4(\chi 1)(1\text{III}_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	46	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$, $b=2$, $c=6$	$6\chi(1\text{III}_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	47	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$, $b=6$, $c=2$	$6\chi 1(1\text{III}_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	48	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=5$	$3(\chi 3)(1\text{III}_4)^{c}_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	49	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=2$	$2(\chi 2)(1\text{III}_4)^{c}_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}1c$	8	8	50	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $c=5$	$4\chi 2(1\text{III}_4)^{c}_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}1c$	8	8	51	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $c=2$	$3(\chi 3)(1\text{III}_4)^{c'}_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	52	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=5$, $c=6$	$4(\chi 2)(1\text{III}_4)_{2'5'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	53	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=6$, $c=5$	$5\chi3\,(1\text{III}_4)_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	54	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=2$, $c=6$	$4\,(\chi1)\,(1\text{III}_4)_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	55	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=6$, $c=2$	$3\,(\chi4)\,(1\text{III}_4)_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	56	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=2$, $c=5$	$6\chi1\,(1\text{III}_4)_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	57	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=5$, $c=2$	$5\,(\chi2)\,(1\text{III}_4)_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	58	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=5$, $c=5$	$5\chi3\,(1\text{III}_4)'_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	59	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{2'}$, $b=2$, $c=2$	$4\,(\chi2)\,(1\text{III}_4)'_{2'5'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	60	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$, $b=5$	$3\,(\chi2)\,(1\text{III}_4)^{c}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	61	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$, $b=6$	$2\,(\chi2)\,(1\text{III}_4)^{c}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}1c$	8	8	62	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$, $c=5$	$4\chi1\,(1\text{III}_4)^{c}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}1c$	8	8	63	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$, $c=6$	$3\,(\chi1)\,(1\text{III}_4)^{c}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	64	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$, $b=5$, $c=2$	$4\,(\chi2)\,(1\text{III}_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	65	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$, $b=2$, $c=5$	$5\chi2\,(1\text{III}_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	66	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$, $b=6$, $c=2$	$4\,(\chi2)\,(1\text{III}_4)_{1'2'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	67	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'},\ b=2,\ c=6$	$5\chi\,(1\mathrm{III}_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	68	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'},\ b=5,\ c=6$	$5\,(\chi1)\,(1\mathrm{III}_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	69	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'},\ b=6,\ c=5$	$6\chi1\,(1\mathrm{III}_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	70	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'},\ b=5,\ c=5$	$5\chi1\,(1\mathrm{III}_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	71	4χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'},\ b=6,\ c=6$	$4\,(\chi1)\,(1\mathrm{III}_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	72	5χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'},\ b=4$	$3\,(\chi4)\,(1\mathrm{III}_5)_{4'8'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	73	5χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'},\ b=4$	$14\,(\chi1)\,(1\mathrm{III}_5)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	74	5χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'},\ b=5$	$3\,(\chi4)\,(1\mathrm{III}_5)_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	75	5χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'},\ b=4$	$2\,(\chi5)\,(1\mathrm{III}_5)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	76	5χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'},\ b=5$	$3\,(\chi2)\,(1\mathrm{III}_5)_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	77	5χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'},\ b=8$	$2\,(\chi2)\,(1\mathrm{III}_5)_{1'4'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	78	5χIII	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{4'}{5}$	$2\,(\chi4)\,(1\mathrm{III}_5)_{4'5}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	79	5χIII	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{4'}{5}$	$2\,(\chi5)\,(1\mathrm{III}_5)_{4'5}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	80	5χIII	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{4}$	$14\,(\chi1)\,(1\mathrm{III}_5)_{45'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	81	5χIII	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{4}$	14 (χ2) $(1\mathrm{III}_5)_{45'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	82	5χIII	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{4'}$	14 (χ1) $(1\mathrm{III}_5)'_{4'5'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	83	5χIII	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{4'}$	2 (χ6) $(1\mathrm{III}_5)_{4'5'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	84	5χIII	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{4}{4'}$	14 (χ2) $(1\mathrm{III}_5)_{44'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	85	5χIII	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{4}{4'}$	2 (χ5) $(1\mathrm{III}_5)_{44'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	86	5ΧIII	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	2 (χ5) $(1\mathrm{III}_5)_{55'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	87	5χIII	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	3 (χ4) $(1\mathrm{III}_5)_{55'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	88	5χIII	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{4}{5}$	2 (χ1) $(1\mathrm{III}_5)_{45}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	89	5χIII	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{4}{5}$	3 (χ3) $(1\mathrm{III}_5)_{45}$

IV. Тетрагональная сингония

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	явная симметрия	симметрия связи	Символ системы
abc	10	8	1	8φIII	1	$a=4,\ b=3,\ c=7$	8φ3 (1III)
abc	10	8	2	8φIII	1	$a=8,\ b=3,\ c=7$	8φ1 (1III)
$\frac{a}{a'}bc$	10	8	3	8φIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3},\ b=2,\ c=6$	17 (φ1) $(1\mathrm{III})_r$
$\frac{a}{a'}bc$	10	8	4	8φIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3},\ b=6,\ c=2$	17 (φ2) $(1\mathrm{III})_l$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}bc$	10	8	5	$8\varphi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7},\ b=2,\ c=6$	$17(\varphi 1)(1III)'_r$
$\frac{a}{a'}bc$	10	8	6	$8\varphi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7},\ b=6,\ c=2$	$17(\varphi 2)(1III)'_l$
$1\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	10	8	7	$8\varphi III$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{3}{2},\ \frac{c}{c'}=\frac{7}{6}$	$8\varphi 2(1III)^c_{23}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	10	8	8	$8\varphi III$	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{3}{2},\ \frac{c}{c'}=\frac{7}{6}$	$9\varphi 1(1III)_{23}$
abc	12	8	1	$8\chi III$	1	$a=1',\ b=3,\ c=7$	$8\chi(1III)$
abc	12	8	2	$8\chi III$	1	$a=5',\ b=3,\ c=7$	$8\chi 1(1III)$
abc	12	8	3	$8\chi III$	1	$a=1',\ b=3',\ c=7'$	$6(\chi 1)(1III)'$
abc	12	8	4	$8\chi III$	1	$a=5',\ b=3',\ c=7'$	$6(\chi 2)(1III)'$
$\frac{a}{a'}bc$	12	8	5	$8\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3},\ b=1',\ c=5'$	$17(\chi 1)(1III)_r$
$\frac{a}{a'}bc$	12	8	6	$8\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3},\ b=3',\ c=7'$	$17(\chi 1)(1III)'_r$
$\frac{a}{a'}bc$	12	8	7	$8\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7},\ b=1',\ c=5'$	$17(\chi 1)(1III)_l$
$\frac{a}{a'}bc$	12	8	8	$8\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7},\ b=3',\ c=7'$	$17(\chi 1)(1III)'_l$
$\frac{a}{a'}bc$	12	8	9	$8\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'},\ b=3,\ c=7$	$9\chi(1III)_{1'5'}$
$\frac{\dot{a}}{a'}bc$	12	8	10	$8\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'},\ b=3',\ c=7'$	$6(\chi 1)(1III)'_{1'5'}$
$1\frac{b}{b'}$	12	8	11	$8\chi III$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{3}{3'},\ \frac{c}{c'}=\frac{7}{7'}$	$8\chi 1(1III)^c_{33'}$
$a\frac{b}{b'}$	12	8	12	$8\chi III$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{3}{3'},\ \frac{c}{c'}=\frac{7}{7'}$	$9\chi(1III)_{33'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abc	13	8	1	10III	1	$a=4',\ b=3,\ c=7$	(7) (1III)
abc	13	8	2	10III	1	$a=8',\ b=3,\ c=7$	10 (1III)
abc	13	8	3	10III	1	$a=4',\ b=2',\ c=6'$	(8) (1III)
abc	13	8	4	10III	1	$a=4',\ b=6',\ c=2'$	(18) (1III)
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	5	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3},\ b=2'$	(23) $(1III)_r$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	6	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3},\ b=4'$	(23) $(1III)'_r$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	7	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7},\ b=2'$	(24) $(1III)_l$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	8	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7},\ b=4'$	(24) $(1III)'_l$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	9	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'},\ b=4'$	(24) $(1III)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	10	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'},\ b=8'$	(23) $(1III)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	11	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'},\ b=2'$	(20) $(1III)_{4'8'}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	12	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'},\ b=6'$	(19) $(1III)_{4'8'}$
$\frac{a}{a'}bc$	13	8	13	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'},\ b=3,\ c=7$	(11) $(1III)_{4'8'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	13	8	14	10III	1	$\frac{b}{b'}=\frac{3}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{7}{6'}$	(7) $(1III)^c_{2'3}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	13	8	15	10III	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{3}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{7}{6'}$	11 $(1III)_{2'3}$
$\frac{a}{a'}11$	13	8	16	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{4'}$	(19) $(1III)^s_{2'4'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	17	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{4'},\ b=5$	$(21)\ (1\mathrm{III})_{2'4'}$
$\frac{a}{a'}11$	13	8	18	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{8'}$	$(20)\ (1\mathrm{III})^{s}_{2'8'}$
$\frac{a}{a'}bb$	13	8	19	10III	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{8'},\ b=5$	$(21)\ (1\mathrm{III})_{2'8'}$
abc	14	8	1	4δIII	1	$a=4,\ b=3',\ c=7'$	$2\ (\delta 2)\ (1\mathrm{III}_4)$
abc	14	8	2	4δIII	1	$a=8,\ b=3',\ c=7'$	$4\delta 1\ (1\mathrm{III}_4)$
abc	14	8	3	4δIII	1	$a=8,\ b=2',\ c=6'$	$4\delta 1\ (1\mathrm{III}_4)'$
abc	14	8	4	4δIII	1	$a=8,\ b=6',\ c=2'$	$2\ (\delta 2)\ (1\mathrm{III}_4)'$
$\frac{a}{a'}bc$	14	8	5	4δIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'},\ b=3',\ c=7'$	$5\ (\delta 1)\ (1\mathrm{III}_4)_{2'6'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	6	4δIII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{3'}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6'}$	$5\delta 2\ (1\mathrm{III}_4)^{c}_{2'3'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	7	4δIII	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{3'}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6'}$	$7\delta 1\ (1\mathrm{III}_4)_{2'3'}$
abc	14	8	8	5δIII	1	$a=8,\ b=3',\ c=7'$	$4\delta 1\ (1\mathrm{III}_5)$
abc	14	8	9	5δIII	1	$a=4',\ b=3',\ c=7'$	$5\delta 3\ (1\mathrm{III}_5)$
abc	14	8	10	5δIII	1	$a=8',\ b=2,\ c=6$	$5\delta\ (1\mathrm{III}_5)$
abc	14	8	11	5δIII	1	$a=8',\ b=6,\ c=2$	$5\delta 2\ (1\mathrm{III}_5)$
$\frac{a}{a'}bc$	14	8	12	5δIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'},\ b=3',\ c=7'$	$7\delta 1\ (1\mathrm{III}_5)_{4'8'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	13	5δIII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{3'}{2},\ \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6}$	$2\ (\delta 1)\ (1\mathrm{III}_5)^{c}_{23'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	14	5δIII	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{3'}{2},\ \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6}$	$6\delta\ (1\mathrm{III}_5)_{23'}$
abc	15	16	1	10χIII	15′	$a=4'8,\ b=37',\ c=3'7$	$7\ (\chi 4)\ (1\pi\mathrm{III})$
abc	15	16	2	10χIII	15′	$a=48',\ b=37',\ c=3'7$	$10\chi 3\ (1\pi\mathrm{III})$
abc	15	16	3	10χIII	15′	$a=4'8,\ b=2'6,\ c=26'$	$8\ (\chi 4)\ (1\pi\mathrm{III})$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abc	15	16	4	10χIII	15′	$a=4'8,\ b=26',\ c=2'6$	18 (χ3) (1πIII)
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	5	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{1'5'},\ b=26$	18 (χ1) $(3\text{III})_{1'3'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	6	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{1'5'},\ b=48$	18 (χ3) $(3\text{III})_{1'3'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	7	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{2'6'},\ b=37$	7 (χ4) $(3\text{III})_{2'3'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	8	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{2'6'},\ b=26$	18 (χ2) $(3\text{III})_{2'3}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	9	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{4'8'},\ b=37$	10χ3 $(3\text{III})_{3'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	10	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{4'8'},\ b=48$	8 (χ4) $(3\text{III})_{3'4'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	11	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{3'7'}{4'8'},\ b=1'5',\ b=2'6'$	21 (χ1) $(3\text{III})_{3'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	12	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{2'6'}{4'8'},\ b=26$	8 (χ3) $(3\text{III})_{2'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	13	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{2'6'}{4'8'},\ b=48$	8 (χ4) $(3\text{III})_{2'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	14	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{2'6'},\ b=37$	7 (χ3) $(3\text{III})_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	15	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{2'6'},\ b=48$	18 (χ3) $(3\text{III})_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	16	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{4'8'},\ b=37$	10χ1 $(3\text{III})_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bb$	15	16	17	10χIII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{4'8'},\ b=26$	8 (χ2) $(3\text{III})_{1'4'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abc	15	16	18	10χIII	18′	$a=1'8,\ b=2'3,\ c=6'7$	10χ1 (4III)
abc	15	16	19	10χIII	18′	$a=45',\ b=2'3,\ c=6'7$	10χ3 (4III)
abc	15	16	20	10χIII	18′	$a=1'8,\ b=23',\ c=67'$	8 (χ1) (4III)
abc	15	16	21	10χIII	18′	$a=45',\ b=23',\ c=67'$	18 (χ4) (4III)
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{c}{c'}$	15	16	22	10χIII	18′	$\frac{b}{b'}=\frac{2'3}{23'},\ \frac{c}{c'}=\frac{6'7}{67'}$	10χ2 $(4III)^{c}_{22'}$
$a\,\frac{b}{b'}\,\frac{c}{c'}$	15	16	23	10χIII	18′	$a=1'8,\ \frac{b}{b'}=\frac{2'3}{23'},\ \frac{c}{c'}=\frac{6'7}{67'}$	11χ1 $(4III)_{22'}$
abc	15	16	24	10χIII	14′	$a=1'4,\ b=36',\ c=2'7$	7 (χ3) (4III)
abc	15	16	25	10χIII	14′	$a=5'8,\ b=36',\ c=2'7$	7 (χ4) (4III)
abc	15	16	26	10χIII	14′	$a=1'4,\ b=3'6,\ c=27'$	18 (χ3) (4III)
abc	15	16	27	10χIII	14′	$a=5'8,\ b=3'6,\ c=27'$	8 (χ4) (4III)
abc	15	16	28	10χIII	11′	$a=44',\ b=33',\ c=77'$	7 (χ3) (1χIII)
abc	15	16	29	10χIII	11′	$a=88',\ b=33',\ c=77'$	10χ1 (1χIII)
abc	15	16	30	10χIII	11′	$a=44',\ b=22',\ c=66'$	8 (χ1) (1χIII)
abc	15	16	31	10χIII	11′	$a=44',\ b=66',\ c=22'$	18 (χ3) (1χIII)
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{c}{c'}$	15	16	32	10χIII	11′	$\frac{b}{b'}=\frac{33'}{22'},\ \frac{c}{c'}=\frac{77'}{66'}$	7 (χ1) $(1χIII)^{c}_{23}$
$a\,\frac{b}{b'}\,\frac{c}{c'}$	15	16	33	10χIII	11′	$a=88',\ \frac{b}{b'}=\frac{33'}{22'},\ \frac{c}{c'}=\frac{77'}{66'}$	11χ1 $(1χIII)_{23}$
abc	15	16	34	10χIII	18	$a=1'8',\ b=23,\ c=67$	10χ (1χ′III)
abc	15	16	35	10χIII	18	$a=4'5',\ b=23,\ c=67$	7 (χ2) (1χ′III)
abc	15	16	36	10χIII	18	$a=1'8',\ b=2'3',\ c=6'7'$	8 (χ2) (1χ′III)
abc	15	16	37	10χIII	18	$a=4'5',\ b=2'3',\ c=6'7'$	8 (χ3) (1χ′III)
abc	15	16	38	10χIII	14	$a=1'4',\ b=36,\ c=27$	7 (χ1) (1χ′III)
abc	15	16	39	10χIII	14	$a=5'8',\ b=36,\ c=27$	10χ2 (1χ′III)
abc	15	16	40	10χIII	14	$a=1'4',\ b=3'6',\ c=2'7'$	18 (χ1) (1χ′III)
abc	15	16	41	10χIII	14	$a=5'8',\ b=3'6',\ c=2'7'$	18 (χ2) (1χ′III)
$\frac{a}{a'}\,bc$	15	16	42	10χIII	14	$\frac{a}{a'}=\frac{5'8'}{1'4'},\ b=36,\ c=27$	11χ1 $(1χ'III)_{1'5'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	43	10χIII	18	$\frac{a}{a'}=\frac{1'8'}{4'5'}$, $b=23$, $c=67$	$11\chi\,(\chi'\mathrm{III})_{1'4'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	44	10χIII	18	$\frac{b}{b'}=\frac{23}{2'3'}$, $\frac{c}{c'}=\frac{67}{6'7'}$	$7\,(\chi 2)\,(1\chi'\mathrm{III})_{33'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	45	10χIII	18	$a=1'8'$, $\frac{b}{b'}=\frac{23}{2'3'}$, $\frac{c}{c'}=\frac{67}{6'7'}$	$11\chi\,(1\chi'\mathrm{III})_{33'}$
				VI. Кубическая сингония			
aa_1a_2	29	24	1	19χIII	11_11_2	$a=1'2_26_1$, $a_1=1'_126_2$, $a_2=1'_22_16$	19χ (13III)
aa_1a_2	29	24	2	19χIII	11_11_2	$a=1'_22_16$, $a_1=1'2_26_1$, $a_2=1'_126_2$	25 (χ1) (13III)
aa_1a_2	30	24	1	19δIII	11_11_2	$a=3'_147'_2$, $a_1=3'_24_17'$, $a_2=3'4_27'_1$	$19\delta 1$ (13III)
aa_1a_2	31	24	1	22III	11_11_2	$a=3_27_18'$, $a_1=37_28'_1$, $a_2=3_178'_2$	22 (13III)
aa_1a_2	32	24	1	22χIII	$(15')_3$	$a=3_23'_14\,7_17'_28'$, $a_1=33'_24_17_27'8'_1$, $a_2=3_13'4_277'_18'_2$	$22\chi 1$ (13αIII)
aa_1a_2	32	24	2	22χIII	$(18)_3$	$a=1'2_23_26_17_18'$, $a_1=1'_1236_27_28'_1$, $a_2=1'_22_13_1678'_2$	22χ (13φIII)
aa_1a_2	32	24	3	22χIII	$(14')_3$	$a=1'2_23'_146_17'_2$, $a_1=1'_123'_24_16_27'$, $a_2=1'_22_13'4_267'_1$	9 (χ1) (16III)
				Системы трипараллелоэдров XVI порядка			
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	1	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'}$, $b=3$, $c=7$	$7\,(\chi 3)\,(1\mathrm{III})_{1'4'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	2	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'}, b=7, c=3$	$10\chi 1\,(1\mathrm{III})_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	3	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'}, b=2, c=6$	$8\,(\chi 1)\,(1\mathrm{III})_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	4	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'}, b=6, c=2$	$18\,(\chi 3)\,(1\mathrm{III})_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	5	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'}, b=3, c=7$	$7\,(\chi 4)\,(1\mathrm{III})_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	6	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'}, b=7, c=3$	$10\chi 3\,(1\mathrm{III})_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	7	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'}, b=2, c=6$	$18\,(\chi 4)\,(1\mathrm{III})_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	8	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'}, b=6, c=2$	$8\,(\chi 4)\,(1\mathrm{III})_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	9	10χIII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{4'}, \frac{b}{b'}=\frac{3'}{2'}, \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6'}$	$21\,(\chi 1)\,(1\mathrm{III})_{4'5'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	10	10χIII	1	$a=8', \frac{b}{b'}=\frac{3}{2}, \frac{c}{c'}=\frac{7}{6}$	$10\chi 2\,(1\mathrm{III})_{23}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	11	10χIII	1	$a=1', \frac{b}{b'}=\frac{3}{2}, \frac{c}{c'}=\frac{7}{6'}$	$7\,(\chi 3)\,(1\mathrm{III})_{2'3}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	12	10χIII	1	$a=8, \frac{b}{b'}=\frac{3}{2'}, \frac{c}{c'}=\frac{7}{6'}$	$7\,(\chi 4)\,(1\mathrm{III})_{2'3}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	13	10χIII	1	$a=1', \frac{b}{b'}=\frac{3'}{2}, \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6}$	$18\,(\chi 1)\,(1\mathrm{III})_{23'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	14	10χIII	1	$a=8, \frac{b}{b'}=\frac{3'}{2}, \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6}$	$18\,(\chi 2)\,(1\mathrm{III})_{23'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	15	10χIII	1	$a=1', \frac{b}{b'}=\frac{3'}{2'}, \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6'}$	$18\,(\chi 3)\,(1\mathrm{III})_{2'3'}$

Таблица 4 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	16	$10\chi III$	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{3'}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{7'}{6'}$	$8(\chi 4)(1III)_{2'3'}$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	17	$10\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{4'},\ b=6,\ c=2$	$21(\chi 1)(1III)_r$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	18	$10\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{4'},\ b=2,\ c=6$	$21(\chi 2)(1III)_r$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	19	$10\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{2'},\ b=6,\ c=2$	$21(\chi 1)(1III)_l$
$\frac{a}{a'}bc$	15	16	20	$10\chi III$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{2'},\ b=2,\ c=6$	$21(\chi 2)(1III)_l$

Таблица 5

Гекса- и гептапараллелоэдры II и высшего порядков

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
Гекса- и гептапараллелоэдры II порядка							
I. Триклинная сингония							
$1aa$	2	2	1	$1\pi\mathrm{VI}$	1	$a=5'$	$1\pi\,(1\mathrm{VI})^{s}$
aaa	2	2	2	$1\pi\mathrm{VI}$	1	$a=5'$	$1\pi\,(1\mathrm{VI})^{s'}$
$a11$	2	2	1	$1\pi\mathrm{VII}$	1	$a=5'$	$1\pi\,(1\mathrm{VII})^{s}$
aaa	2	2	2	$1\pi\mathrm{VII}$	1	$a=5'$	$1\pi\,(1\mathrm{VII})^{g}$
II. Моноклинная сингония							
$1aa$	3	2	1	$3\mathrm{VI}$	1	$a=5$	$(1)\,(1\mathrm{VI})^{s}$
$a1a$	3	2	2	$3\mathrm{VI}$	1	$a=5$	$3\,(1\mathrm{VI})^{s}$
$1aa$	3	2	3	$3\mathrm{VI}'$	1	$a=4'$	$(1)\,(1\mathrm{VI}')^{s}$
aaa	3	2	4	$3\mathrm{VI}'$	1	$a=4'$	$3\,(1\mathrm{VI}')^{s}$
$a11$	3	2	1	$3\mathrm{VII}$	1	$a=5$	$3\,(1\mathrm{VII})^{s}$
aaa	3	2	2	$3\mathrm{VII}$	1	$a=5$	$1\,(1\mathrm{VII})^{g}$
$a11$	3	2	3	$3\mathrm{VII}'$	1	$a=4'$	$3\,(1\mathrm{VII}')^{s}$
aaa	3	2	4	$3\mathrm{VII}'$	1	$a=4'$	$3\,(1\mathrm{VII}')^{g}$
$1aa$	3	2	5	$3\mathrm{VII}'$	1	$a=4'$	$(1)\,(1\mathrm{VII}')^{s}$
$1aa$	4	2	1	$1\chi'\mathrm{VI}$	1	$a=1'$	$1\chi1\,(1\mathrm{VI})^{s}$
$a1a$	4	2	2	$1\chi'\mathrm{VI}$	1	$a=1'$	$1\chi'1\,(1\mathrm{VI})^{s}$
$1aa$	4	2	3	$1\chi'\mathrm{VI}'$	1	$a=8$	$1\chi1\,(1\mathrm{VI}')^{s}$
aaa	4	2	4	$1\chi'\mathrm{VI}'$	1	$a=8$	$1\chi'1\,(1\mathrm{VI}')^{s}$
$a11$	4	2	1	$1\chi'\mathrm{VII}$	1	$a=1'$	$1\chi'1\,(1\mathrm{VII})^{s}$
aaa	4	2	2	$1\chi'\mathrm{VII}$	1	$a=1'$	$1\chi1\,(1\mathrm{VII})^{g}$
$a11$	4	2	3	$1\chi'\mathrm{VII}'$	1	$a=8$	$1\chi'1\,(1\mathrm{VII}')^{s}$
aaa	4	2	4	$1\chi'\mathrm{VII}$	1	$a=8$	$1\chi'1\,(1\mathrm{VII}')^{g}$
$1aa$	4	2	5	$1\chi'\mathrm{VII}$	1	$a=8$	$1\chi1\,(1\mathrm{VII}')^{s}$
$1aa$	5	4	1	$3\chi\mathrm{VI}$	$15'$	$a=1'5$	$1\,(\chi2)\,(1\pi\mathrm{VI})^{s}$
$a1a$	5	4	2	$3\chi\mathrm{VI}$	$15'$	$a=1'5$	$3\chi1\,(1\pi\mathrm{VI})^{s}$
$1aa$	5	4	3	$3\chi\mathrm{VI}$	15	$a=1'5'$	$2\chi1\,(3\mathrm{VI}')^{s}$
$a1a$	5	4	4	$3\chi\mathrm{VI}$	15	$a=1'5'$	$3\chi1\,(3\mathrm{VI}')^{s}$
$1aa$	5	4	5	$3\chi\mathrm{VI}$	$11'$	$a=55'$	$1\,(\chi1)\,(1\chi'\mathrm{VI})^{s}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
*a*1*a*	5	4	6	3χVI	11′	*a* = 55′	$3\chi\,(1\chi'\mathrm{VI})^{s}$
1*aa*	5	4	7	3χVI′	15′	*a* = 4′8	$1\,(\chi 2)\,(1\pi\mathrm{VI}')^{s}$
aaa	5	4	8	3χVI′	15′	*a* = 4′8	$3\chi 1\,(1\pi\mathrm{VI}')^{s}$
1*aa*	5	4	9	3χVI′	14′	*a* = 5′8	$2\chi 1\,(3\mathrm{VI}')^{s}$
aaa	5	4	10	3χVI′	14′	*a* = 5′8	$3\chi 1\,(3\mathrm{VI}')^{s}$
1*aa*	5	4	11	3χVI′	18	*a* = 4′5′	$1\,(\chi 1)\,(1\chi'\mathrm{VI}')^{s}$
aaa	5	4	12	3χVI′	18	*a* = 4′5′	$3\chi\,(1\chi'\mathrm{VI}')^{s}$
*a*11	5	4	1	3χVII	15′	*a* = 1′5	$3\chi 1\,(1\pi\mathrm{VII})^{s}$
aaa	5	4	2	3χVII	15′	*a* = 1′5	$1\,(\chi 2)\,(1\pi\mathrm{VII})^{g}$
*a*11	5	4	3	3χVII	15	*a* = 1′5′	$3\chi 1\,(3\mathrm{VII})^{s}$
aaa	5	4	4	3χVII	15	*a* = 1′5′	$2\chi 1\,(3\mathrm{VII})^{g}$
*a*11	5	4	5	3χVII	11′	*a* = 55′	$3\chi\,(1\chi'\mathrm{VII})^{s}$
aaa	5	4	6	3χVII	11′	*a* = 55′	$1\,(\chi 1)\,(1\chi'\mathrm{VII})^{g}$
*a*11	5	4	7	3χVII′	15′	*a* = 4′8	$3\chi 1\,(1\pi\mathrm{VII}')^{s}$
aaa	5	4	8	3χVII′	15′	*a* = 4′8	$3\chi 1\,(1\pi\mathrm{VII}')^{g}$
1*aa*	5	4	9	3χVII′	15′	*a* = 4′8	$1\,(\chi 2)\,(1\pi\mathrm{VII}')^{s}$
*a*11	5	4	10	3χVII′	14′	*a* = 5′8	$3\chi 1\,(4\mathrm{VII}')^{s}$
aaa	5	4	11	3χVII′	14′	*a* = 5′8	$3\chi 1\,(4\mathrm{VII}')^{g}$
1*aa*	5	4	12	3χVII′	14′	*a* = 5′8	$2\chi 1\,(4\mathrm{VII}')^{s}$
*a*11	5	4	13	3χVII′	18	*a* = 4′5′	$3\chi\,(1\chi'\mathrm{VII}')^{s}$
aaa	5	4	14	3χVII′	18	*a* = 4′5′	$3\chi\,(1\chi'\mathrm{VII}')^{g}$
1*aa*	5	4	15	3χVII′	18	*a* = 4′5′	$1\,(\chi 1)\,(1\chi'\mathrm{VII}')^{s}$
III. Ромбическая сингония							
1*aa*	6	4	1	7VI	15	*a* = 2′6′	$5\,(3\mathrm{VI})^{s}$
*aa*1	6	4	2	7VI	15	*a* = 2′6′	$(4)\,(3\mathrm{VI})^{s}$
1*aa*	6	4	3	6VI	15	*a* = 4′8′	$(2)\,(3\mathrm{VI})^{s}$
1*aa*	6	4	4	6VI	14′	*a* = 58′	$(2)\,(3\mathrm{VI}')^{s}$
aaa	6	4	1	6VII	15	*a* = 2′6′	$(2)\,(3\mathrm{VII})^{g}$
*a*11	6	4	2	7VII	15	*a* = 4′8′	$(4)\,(3\mathrm{VII})^{s}$
aaa	6	4	3	7VII	15	*a* = 4′8′	$(5)\,(3\mathrm{VII})^{g}$
*a*11	6	4	4	7VII	14′	*a* = 58′	$(4)\,(3\mathrm{VII}')^{s}$
aaa	6	4	5	7VII	14′	*a* = 58′	$(4)\,(3\mathrm{VII}')^{g}$

Т а б л и ц а 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
1*aa*	6	4	6	7VII	14′	*a* = 58′	5 (3VII′)^{s}
1*aa*	7	4	1	3φ″VI	15	*a* = 26	2φ′1 (3VI)^{s}
*aa*1	7	4	2	3φ″VI	15	*a* = 26	3φ3 (3VI)^{s}
1*aa*	7	4	3	3φ″VI	12	*a* = 56	1 (φ5) (1χ′VI)^{s}
*aa*1	7	4	4	3φ″VI	12	*a* = 56	3φ1 (1χ′VI)^{s}
*a*1*a*	7	4	5	3φ″VI	12	*a* = 56	3φ2 (1χ′VI)^{s}
1*aa*	7	4	6	3φ′VI	15	*a* = 48	2φ4 (3VI′)^{s}
1*aa*	7	4	7	3φ′VI	18	*a* = 45	1 (φ2) (1χ′VI′)^{s}
1*aa*	7	4	8	3φ′VI′	14′	*a* = 1′4	2φ4 (3VI′)^{s}
1*aa*	7	4	9	3φ′VI′	11′	*a* = 44′	1 (φ2) (1χ′VI)^{s}
1*aa*	7	4	10	3φ′VI′	14	*a* = 1′4′	1 (φ2) (1χ′VII′)^{s}
aaa	7	4	1	3φ′VII	15	*a* = 26	2 (φ4) (3VII)^{g}
aaa	7	4	2	3φ′VII	12	*a* = 56	1 (φ2) (1χ′VII)^{g}
aaa	7	4	3	3φ″VII	15	*a* = 48	2φ′1 (3VII)^{g}
*a*11	7	4	4	3φ″VII	15	*a* = 48	3φ3 (3VII)^{s}
*a*11	7	4	5	3φ″VII	18	*a* = 45	3φ1 (1χ′VII′)^{s}
aaa	7	4	6	3φ″VII	18	*a* = 45	1 (φ5) (1χ′VII′)^{g}
1*aa*	7	4	7	3φ″VII	18	*a* = 45	3φ2 (1χ′VII′)^{s}
*a*11	7	4	8	3φ″VII′	14′	*a* = 1′4	3φ3 (3VII′)^{s}
aaa	7	4	9	3φ″VII′	14′	*a* = 1′4	3φ3 (3VII′)^{g}
1*aa*	7	4	10	3φ″VII′	14′	*a* = 1′4	2φ′1 (3VII′)^{s}
*a*11	7	4	11	3φ″VII′	11′	*a* = 44′	3φ1 (1χ′VII)^{s}
aaa	7	4	12	3φ″VII′	11′	*a* = 44′	3φ2 (1χ′VII)^{g}
1*aa*	7	4	13	3φ″VII′	11′	*a* = 44′	1 (φ5) (1χ′VII)^{s}
*a*11	7	4	14	3φ″VII′	14	*a* = 1′4′	3φ2(1χ′VII′)^{s}
aaa	7	4	15	3φ″VII′	14	*a* = 1′4′	3φ1 (1χ′VII′)^{g}
*a*11	7	4	16	3φ″VII′	14	*a* = 1′4′	1 (φ5) (1χ′VII′)^{s}
1*aa*	8	8	1	7χVI	11′55	*a* = 22′66′	5χ1 (3χVI)^{s}
*aa*1	8	8	2	7χVI	11′55	*a* = 22′66′	4 (χ2) (3χVI)^{s}
1*aa*	8	8	3	7χVI	12′56′	*a* = 1′25′6	5χ3 (7VI)^{s}
1*aa*	8	8	4	7χVI	1256	*a* = 1′2′5′6′	5χ2 (3φ″VI)^{s}
*a*1*a*	8	8	5	7χVI	1256	*a* = 1′2′5′6′	4 (χ1) (3φ″VI)^{s}
1*aa*	8	8	6	6χVI	11′55′	*a* = 44′88′	2 (χ4) (3χVI)^{s}

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
1*aa*	8	8	7	6χVI	14′5′8	*a* = 1′458′	$2(\chi 4)(3\chi VI')^{s}$
1*aa*	8	8	8	6χVI	14′58′	*a* = 1′45′8	$4\chi 3(6VI)^{s}$
1*aa*	8	8	9	6χVI	1458	*a* = 1′4′5′8′	$2(\chi 3)(3\varphi' VI)^{s}$
1*aa*	8	8	10	6χVI	11′44′	*a* = 55′88′	$2(\chi 3)(3\varphi' VI')^{s}$
aaa	8	8	1	6χVII	11′55′	*a* = 22′66′	$2(\chi 4)(3\chi VII)^{g}$
aaa	8	8	2	6χVII	12′56′	*a* = 1′25′6	$4\chi 3(6VII)^{g}$
aaa	8	8	3	6χVII	1256	*a* = 1′2′5′6′	$2(\chi 3)(3\varphi' VII)^{g}$
*a*11	8	8	4	7χVII	11′55′	*a* = 44′88′	$4(\chi 2)(3\chi VII)^{s}$
aaa	8	8	5	7χVII	11′55′	*a* = 44′88′	$5\chi 1(3\chi VII)^{g}$
*a*11	8	8	6	7χVII	14′5′8	*a* = 1′458′	$4(\chi 2)(3\chi VII')^{s}$
aaa	8	8	7	7χVII	14′5′8	*a* = 1′458′	$4(\chi 2)(3\chi VII')^{g}$
1*aa*	8	8	8	7χVII	14′5′8	*a* = 1′458′	$5\chi 1(3\chi VII')^{s}$
*a*11	8	8	9	7χVII	14′58′	*a* = 1′45′8	$5\chi 3(7VII)^{s}$
aaa	8	8	10	7χVII	14′58′	*a* = 1′45′8	$5\chi 3(7VII)^{g}$
*a*11	8	8	11	7χVII	1458	*a* = 1′4′5′8′	$4(\chi 1)(3\varphi'' VII)^{s}$
aaa	8	8	12	7χVII	1458	*a* = 1′4′5′8′	$5\chi 2(3\varphi'' VII)^{g}$
*a*11	8	8	13	7χVII	11′44′	*a* = 55′88′	$4(\chi 1)(3\varphi'' VII')^{s}$
aaa	8	8	14	7χVII	11′44′	*a* = 55′88′	$4(\chi 1)(3\varphi'' VII')^{g}$
1*aa*	8	8	15	7χVII	11′44′	*a* = 55′88′	$5\chi 2(3\varphi'' VII')^{s}$
IV. Тетрагональная сингония							
1*aa*	9	4	1	9VI	15	*a* = 37	$(6)(3VI)^{s}$
aaa	9	4	1	9VII	15	*a* = 37	$(6)(3VII)^{s}$
1*aa*	10	8	1	9φVI	1256	*a* = 3478	$6(\varphi 3)(3\varphi'' VI)^{s}$
1*aa*	10	8	2	9φVI	1458	*a* = 2367	$6(\varphi 1)(3\varphi' VI)^{s}$
1*aa*	10	8	3	9φVI	1357	*a* = 2468	$8\varphi 3(9VI)^{s}$
aaa	10	8	1	9φVII	1256	*a* = 3478	$6(\varphi 1)(3\varphi' VII)^{g}$
aaa	10	8	2	9φVII	1458	*a* = 2367	$6(\varphi 3)(3\varphi'' VII)^{g}$
aaa	10	8	3	9φVII	1357	*a* = 2468	$8\varphi 3(9VII)^{g}$
1*aa*	11	8	1	3πVI	15	*a* = 3′7′	$2\pi(3VI)^{s}$
aaa	11	8	1	3πVII	15	*a* = 3′7′	$2\pi(3VII)^{g}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
1*aa*	12	8	1	9φVI	11′55′	*a* = 33′77′	6 (χ1) (3χVI)^{s}
1*aa*	12	8	2	9φVI	13′57′	*a* = 1′35′7	6 (χ2) (3πVI)^{s}
1*aa*	12	8	3	9φVI	1357	*a* = 1′3′5′7′	8χ1 (9VI)^{s}
aaa	12	8	1	9χVII	11′55′	*a* = 33′77′	6 (χ1) (3χVII)^{g}
aaa	12	8	2	9χVII	13′57′	*a* = 1′35′7	6 (χ2) (3πVII)^{g}
aaa	12	8	3	9χVII	1357	*a* = 1′3′5′7′	8χ1 (9VII)^{g}
1*aa*	13	8	1	11VI	12′56′	*a* = 34′78′	(18) (7VI)^{s}
1*aa*	13	8	2	11VI	14′58′	*a* = 2′36′7	(8) (6VI)^{s}
1*aa*	13	8	3	11VI	1357	*a* = 2′4′6′8′	(7) (9VI)^{s}
aaa	13	8	1	11VII	12′56′	*a* = 34′78′	(8) (6VII)^{g}
aaa	13	8	2	11VII	14′58′	*a* = 2′36′7	(18) (7VII)^{g}
aaa	13	8	3	11VII	1357	*a* = 2′4′6′8′	(7) (9VII)^{g}
1*aa*	14	8	1	7δVI	12′56′	*a* = 3′47′8	5δ3 (7VI)^{s}
1*aa*	14	8	2	7δVI	1458	*a* = 2′3′6′7′	5δ (3φ′VI)^{s}
1*aa*	14	8	3	7δVI	13′57′	*a* = 2′46′8	5δ3 (3πVI)^{s}
1*aa*	14	8	4	6δVI	14′58′	*a* = 23′67′	4δ1 (6VI)^{s}
1*aa*	14	8	5	6δVI	1256	*a* = 3′4′7′8′	2 (δ1) (3φ″VI)^{s}
1*aa*	14	8	6	6δVI	13′57′	*a* = 24′68′	2 (δ2) (3πVI)^{s}
aaa	14	8	1	6δVII	12′56′	*a* = 3′47′8	4δ1 (6VII)^{g}
aaa	14	8	2	6δVII	1458	*a* = 2′3′6′7′	2 (δ1) (3φ″VII)^{g}
aaa	14	8	3	6δVII	13′57′	*a* = 2′46′8	2 (δ2) (3πVII)^{g}
aaa	14	8	4	7δVII	14′58′	*a* = 23′67′	5δ3 (7VII)^{g}
aaa	14	8	5	7δVII	1256	*a* = 3′4′7′8′	5δ (3φ′VII)^{g}
aaa	14	8	6	7δVII	13′57′	*a* = 24′68′	5δ3 (3πVII)^{g}
1*aa*	15	16	1	11χVI	11′22′55′66′	*a* = 33′44′77′88′	18 (χ1) (7χVI)^{s}
1*aa*	15	16	2	11χVI	11′44′55′88′	*a* = 22′33′66′77′	8 (χ1) (6χVI)^{s}
1*aa*	15	16	3	11χVI	12345678	*a* = 1′2′3′4′5′6′7′8′	7 (χ2) (9φVI)^{s}
1*aa*	15	16	4	11χVI	11′33′55′77′	*a* = 22′44′66′88′	7 (χ3) (9χVI)^{s}
1*aa*	15	16	5	11χVI	12′34′56′78′	*a* = 1′23′45′67′8	10χ3 (11VI)^{s}
1*aa*	15	16	6	11χVI	12′3′456′7′8	*a* = 1′234′5′678′	18 (χ4) (7δVI)^{s}
1*aa*	15	16	7	11χVI	123′4′567′8′	*a* = 1′2′345′6′78	8 (χ3) (6δVI)^{s}
aaa	15	16	1	11χVII	11′22′55′66′	*a* = 33′44′77′88′	8 (χ1) (6χVII)^{g}
aaa	15	16	2	11χVII	11′44′55′88′	*a* = 22′33′66′77′	18 (χ1) (7χVII)^{g}

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
aaa	15	16	3	$11\chi VII$	12345678	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'$	$7(\chi 2)(9\varphi VII)^g$
aaa	15	16	4	$11\chi VII$	11'33'55'77'	$a = 22'44'66'88'$	$7(\chi 3)(9\chi VII)^g$
aaa	15	16	5	$11\chi VII$	12'34'56'78'	$a = 1'23'45'67'8$	$10\chi 3(11VII)^g$
aaa	15	16	6	$11\chi VII$	12'3'456'7'8	$a = 1'234'5'678'$	$8(\chi 3)(6\delta VII)^g$
aaa	15	16	7	$11\chi VII$	123'4'567'8'	$a = 1'2'345'6'78$	$18(\chi 4)(7\delta VII)^g$
				V. Гексагональная сингония			
aaa	17	6	1	$13\varphi VI$	$11_1 1_2$	$a = 88_1 8_2$	$13\varphi 1(13VI)^s$
aaa	17	6	1	$13\varphi VII$	$11_1 1_2$	$a = 88_1 8_2$	$13\varphi 1(13VII)^g$
aaa	18	6	1	$13\alpha VI$	$11_1 1_2$	$a = 5'5'_1 5'_2$	$13\alpha(13VI)^s$
aaa	18	6	1	$13\alpha VII$	$11_1 1_2$	$a = 5'5'_1 5'_2$	$13\alpha(13VII)^g$
aaa	19	6	1	16VI	$11_1 1_2$	$a = 4'4'_1 4'_2$	$16(13VI)^s$
aaa	19	6	1	16VII	$11_1 1_2$	$a = 4'4'_1 4'_2$	$16(13VII)^g$
aaa	20	12	1	$16\alpha VI$	$(18)_3$	$a = (4'5')_3$	$16\alpha(13\varphi VI)^s$
aaa	20	12	2	$16\alpha VI$	$(15')_3$	$a = (5'8)_3$	$16\alpha 1(16VI)^s$
aaa	20	12	3	$16\alpha VI$	$(14')_3$	$a = (4'8)_3$	$16\alpha 1(13\alpha VI)^s$
aaa	20	12	1	$16\delta VII$	$(18)_3$	$a = (4'5')_3$	$16\alpha(13\varphi VII)^g$
aaa	20	12	2	$16\delta VII$	$(15')_3$	$a = (5'8)_3$	$16\alpha 1(16VII)^g$
aaa	20	12	3	$16\delta VII$	$(14')_3$	$a = (4'8)_3$	$16\alpha 1(13\alpha VII)^g$
				VI. Кубическая сингония			
aaa	29	24	1	$20\chi VII$	$(12'56')_3$	$a = (1'25'6)_3$	$19\chi 1(20VII)^g$
aaa	30	24	1	$20\delta VII$	$(12'56')_3$	$a = (3'47'8)_3$	$19\delta 1(20VII)^g$
aaa	31	24	1	23VII	$(12'56')_3$	$a = (34'78')_3$	$(9)(20VII)^g$
aaa	32	48	1	$23\chi VII$	$(11'22'55'66')_3$	$a = (33'44'77'88')_3$	$9(\chi 1)(20\chi VII)^g$
aaa	32	48	2	$23\chi VII$	$(12'3'456'7'8)_3$	$a = (1'234'5'678')_3$	$9(\chi 2)(20\delta VII)^g$
aaa	32	48	3	$23\chi VII$	$(12'34'56'78')_3$	$a = (1'23'45'67'8)_3$	$22\chi 1(23VII)^g$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
Гекса- и гептапараллелоэдры III порядка							
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	1	13VI	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1_2}{1_1}$	$(10)\,(1VI)^s_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	2	13VI	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1_1}{1_2}$	$(11)\,(1VI)^s_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	1	13VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1_2}{1_1}$	$(10)\,(1VII)^c_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	2	13VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1_1}{1_2}$	$(11)\,(1VII)^c_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	1	16VI	1′4′	$\frac{a}{a'}=\frac{1_2 4'_2}{1_1 4'_1}$	$(12)\,(3VI)^s_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	2	16VI	1′4′	$\frac{a}{a'}=\frac{1_1 4'_1}{1_2 4'_2}$	$(13)\,(3VI)^s_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	1	16VII	1′4′	$\frac{a}{a'}=\frac{1_2 4'_2}{1_1 4'_1}$	$(12)\,(3VII)^c_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	2	16VII	1′4′	$\frac{a}{a'}=\frac{1_1 4'_1}{1_2 4'_2}$	$(13)\,(3VII)^c_l$
Гекса- и гептапараллелоэдры IV порядка							
II. Моноклинная сингония							
abc	5	4	1	3χVI	1	$a=5',\ b=5,\ c=1'$	$1\,(\chi 2)\,(1VI)$
abc	5	4	2	3χVI	1	$a=5,\ b=5',\ c=1'$	$2\chi 1\,(1VI)$
abc	5	4	3	3χVI	1	$a=1',\ b=5',\ c=5$	$1\,(\chi 2)\,(1VI)'$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	4	3χVI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{1'}$	$1\,(\chi 2)\,(1VI)^s_{1'5'}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I подрядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}b$	5	4	5	$3\chi VI$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{5},\ b=1'$	$3\chi 1\ (1VI)_{55'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	6	$3\chi VI$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{5}{5'}$	$1\ (\chi 2)\ (1VI)^{c}_{55'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}1$	5	4	7	$3\chi VI$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{5'}$	$3\chi 1\ (1VII)^{s}_{55'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	5	4	8	$3\chi VI$	1	$a=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{1'}{5'}$	$2\chi 1\ (1VII)_{1'5'}$
$1bc$	5	4	9	$3\chi VI'$	1	$b=5',\ c=4$	$2\chi 1\ (1VI')^{c}$
$1bc$	5	4	10	$3\chi VI'$	1	$b=5',\ c=8'$	$1\ (\chi 2)\ (1VI')^{c}$
$1bc$	5	4	11	$3\chi VI'$	1	$b=4,\ c=8'$	$1\ (\chi 2)\ (1VI')^{c'}$
$1\frac{b'}{b}\frac{b}{b'}$	5	4	12	$3\chi VI'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{8'}$	$1\ (\chi 2)\ (1VI')^{c}_{5'8'}$
$1\frac{b}{b'}1$	5	4	13	$3\chi VI'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{8'}$	$3\chi 1\ (1VI')^{s}_{5'8'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	14	$3\chi VI'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{8'}$	$1\ (\chi 2)\ (1VI')^{s}_{5'8'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	15	$3\chi VI'$	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{4}{5'}$	$1\ (\chi 2)\ (1VI')^{c}_{45'}$
$1\frac{b}{b'}c$	5	4	16	$3\chi VI'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8'}{5'},\ c=4$	$3\chi 1\ (1VI')^{c}_{5'8'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	5	4	17	$3\chi VI'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4}{5'},\ a=8'$	$3\chi 1\ (1VI')_{45'}$
abb	5	4	1	$3\chi VII$	1	$a=5',\ b=1'$	$2\chi 1\ (1VII)^{c}$
abb	5	4	2	$3\chi VII$	1	$a=5',\ b=5$	$1\ (\chi 2)\ (1VII)^{c}$
abb	5	4	3	$3\chi VII$	1	$a=5,\ b=1'$	$1\ (\chi 2)\ (1VII)^{c'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	5	4	4	$3\chi VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$	$1\ (\chi 2)\ (1VII)^{s}_{1'5'}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	5	4	5	3χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'}$	$3\chi1\ (1\mathrm{VII})_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bb$	5	4	6	3χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{5},\ b=1'$	$3\chi1\ (1\mathrm{VII'})^{c}_{55'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	5	4	7	3χVII	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{5}$	$3\chi1\ (1\mathrm{VII})^{s}_{55'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}$	5	4	8	3χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{5'}$	$1\ (\chi2)\ (1\mathrm{VII})^{s}_{55'}$
abb	5	4	9	3χVII′	1	$a=5',\ b=4$	$1\ (\chi2)\ (1\mathrm{VII'})^{c}$
abb	5	4	10	3χVII′	1	$a=5',\ b=8'$	$2\chi1\ (1\mathrm{VII'})^{c}$
abb	5	4	11	3χVII′	1	$a=4,\ b=5'$	$1\ (\chi2)\ (1\mathrm{VII'})^{c'}$
abb	5	4	12	3χVII′	1	$a=4,\ b=8'$	$2\chi1\ (1\mathrm{VII'})^{c'}$
abb	5	4	13	3χVII′	1	$a=8',\ b=5'$	$1\ (\chi2)\ (1\mathrm{VII'})^{c''}$
abb	5	4	14	3χVII′	1	$a=8',\ b=4$	$1\ (\chi2)\ (1\mathrm{VII'})^{c'''}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	5	4	15	3χVII′	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{8'}$	$3\chi1\ (1\mathrm{VII'})^{s}_{5'8'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	5	4	16	3χVII′	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5'}{8'}$	$3\chi1\ (1\mathrm{VII'})^{s'}_{5'8'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	5	4	17	3χVII′	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{8'}$	$3\chi1\ (1\mathrm{VII'})_{5'8'}$
$\frac{a}{a'}11$	5	4	18	3χVII′	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4}{5'}$	$1\ (\chi2)\ (1\mathrm{VII'})^{s}_{45'}$
$\frac{a}{a'}bb$	5	4	19	3χVII′	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4}{5'},\ b=8'$	$2\chi1\ (1\mathrm{VII'})^{c}_{45'}$
$\frac{a}{a'}1c$	5	4	20	3χVII′	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{8'},\ c=4$	$1\ (\chi2)\ (1\mathrm{VII'})^{c}_{5'8'}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
				III. Ромбическая сингония			
abc	6	4	1	7VI	1	$a=5,\ b=6',\ c=2'$	$4\,(1VI_7)$
abc	6	4	2	7VI	1	$a=5,\ b=2',\ c=6'$	$(2)\,(1VI_7)$
abc	6	4	3	7VI	1	$a=2',\ b=5,\ c=6'$	$(14)\,(1VI_7)$
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{b}{b'}$	6	4	4	7VI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2'}{6'}$	$(4)\,(1VI_7)^s_{2'6'}$
$a\,\frac{b}{b'}\,\frac{b'}{b}$	6	4	5	7VI	1	$a=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{2'}{6'}$	$6\,(1VI_7)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a'}{a}\,c$	6	4	6	7VI	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{6'},\ c=2'$	$6\,(1VI_7)_{56'}$
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{b}{b'}$	6	4	7	6VI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4'}{8'}$	$(14)\,(1VI_6)^s_{4'8'}$
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{b'}{b}$	6	4	8	6VI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5}{8'}$	$(14)\,(1VI_6)^c_{58'}$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a'}{a}\,\frac{a'}{a}$	6	4	1	6VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}$	$(14)\,(1VII_6)^s_{2'6'}$
abb	6	4	2	7VII	1	$a=4',\ b=8'$	$4\,(1VII_7)^c$
abb	6	4	3	7VII	1	$a=8',\ b=4'$	$(2)\,(1VII_7)^c$
abb	6	4	4	7VII	1	$a=5,\ b=4'$	$(14)\,(1VII_7)^c$
abb	6	4	5	7VII	1	$a=5,\ b=8'$	$(2)\,(1VII_7)^c$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a}{a'}\,\frac{a}{a'}$	6	4	6	7VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'}$	$6\,(1VII_6)_{4'8'}$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a'}{a}\,\frac{a'}{a}$	6	4	7	7VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{8'}$	$(4)\,(1VII_6)^s_{4'8'}$
$\frac{a}{a'}\,11$	6	4	8	7VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{5}$	$(4)\,(1VII_6)^s_{4'5}$
$\frac{a}{a'}\,bb$	6	4	9	7VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{5},\ b=8'$	$6\,(1VII_6)^c_{4'5}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abc	7	4	1	$3\varphi''VI$	1	$a=5,\ b=6,\ c=2$	$2\varphi1\ (1VII_7)$
abc	7	4	2	$3\varphi''VI$	b	$a=5,\ b=2,\ c=6$	$2\varphi4\ (1VI_7)$
abc	7	4	3	$3\varphi''VI$	1	$a=6,\ b=5,\ c=2$	$1\ (\varphi3)\ (1VI_7)$
abc	7	4	4	$3\varphi''VI$	1	$a=6,\ b=5,\ c=2$	$1\ (\varphi4)\ (1VI_7)$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}c$	7	4	5	$3\varphi''VI$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{2}$	$3\varphi3\ (1VI_7)^{s}_{25}$
$\frac{a}{a'}b\frac{a'}{a}$	7	4	6	$3\varphi''VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{6},\ c=2$	$3\varphi'2\ (1VI_7)_{56}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	7	4	7	$3\varphi'VI$	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{4}{5}$	$1\ (\varphi4)\ (1VI_6)^{c}_{45}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	7	4	8	$3\varphi'VI$	1	$a=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{4}{8}$	$3\varphi''1\ (1VI_6)_{48}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	7	4	9	$3\varphi'VI'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{1'}{8'}$	$1\ (\varphi4)\ (1VI_6)^{s}_{1'8'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	7	4	10	$3\varphi'VI'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8}{8'}$	$1\ (\varphi4)\ (1VI_6)^{c}_{88'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	7	4	11	$3\varphi'VI'$	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{1'}{8}$	$3\varphi3\ (1VI_6)_{1'8}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	7	4	1	$3\varphi'VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2}{6}$	$3\varphi''1\ (1VII_6)_{26}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a}{a'}$	7	4	2	$3\varphi'VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2}{5}$	$1\ (\varphi4)\ (1VII_6)^{s}_{25}$
abb	7	4	3	$3\varphi''VII$	1	$a=8,\ b=5$	$1\ (\varphi4)\ (1VII_7)^{c}$
abb	7	4	4	$3\varphi''VII$	1	$a=8,\ b=4$	$2\varphi4\ (1VII_7)^{c}$
abb	7	4	5	$3\varphi''VII$	1	$a=4,\ b=5$	$1\ (\varphi3)\ (1VII_7)^{c}$
abb	7	4	6	$3\varphi''VII$	1	$a=4,\ b=8$	$2\varphi1\ (1VII_7)^{c}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$\frac{a}{a'}11$	7	4	7	$3\varphi''VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4}{5}$	$3\varphi3\,(1VII_7)^{s}_{45}$
$\frac{a}{a'}bb$	7	4	8	$3\varphi''VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4}{5},\ b=8$	$3\varphi2'\,(1VII_7)_{45}$
abb	7	4	9	$3\varphi''VII'$	1	$a=8,\ b=8'$	$2\varphi5\,(1VII_7)^c$
abb	7	4	10	$3\varphi''VII'$	1	$a=8,\ b=1'$	$1\,(\varphi4)\,(1VII_7)^c$
abb	7	4	11	$3\varphi''VII'$	1	$a=1',\ b=8$	$1\,(\varphi3)\,(1VII_7)^c$
abb	7	4	12	$3\varphi''VII'$	1	$a=1',\ b=8'$	$3\varphi1\,(1VII_7)^c$
abb	7	4	13	$3\varphi''VII'$	1	$a=8',\ b=1'$	$1\,(\varphi4)\,(1VII_7)^{c'}$
abb	7	4	14	$3\varphi''VII'$	1	$a=8',\ b=8$	$1\,(\varphi4)\,(1VII_7)^{c''}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	7	4	15	$3\varphi''VII'$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'}$	$3\varphi'2\,(1VII_7)_{1'8'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	7	4	16	$3\varphi''VII'$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'}$	$3\varphi3\,(1VII_7)^{s}_{1'8'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	7	4	17	$3\varphi''VII'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8}{8'}$	$3\varphi3\,(1VII_7)^{s}_{88'}$
abc	8	8	1	$7\chi VI$	15′	$a=1'5,\ b=2'6,\ c=26'$	$2\,(\chi6)\,(1\pi VI_7)$
abc	8	8	2	$7\chi VI$	15′	$a=1'5,\ b=26',\ c=2'6$	$4\chi3\,(1\pi VI_7)$
abc	8	8	3	$7\chi VI$	15′	$a=2'6,\ b=1'5,\ c=26'$	$14\,(\chi2)\,(1\pi VI_7)$
abc	8	8	4	$7\chi VI$	12′	$a=56',\ b=5'6,\ c=1'2$	$3\,(\chi3)\,(3VI_7)$
abc	8	8	5	$7\chi VI$	12′	$a=56',\ b=1'2,\ c=5'6$	$3\,(\chi4)\,(3VI_7)$
abc	8	8	6	$7\chi VI$	12′	$a=5'6,\ b=1'2,\ c=56'$	$2\,(\chi5)\,(3VI_7)$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}b$	8	8	7	$7\chi VI$	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{56'}{5'6},\ b=1'2$	$5\,(\chi2)\,(3VI_7)_{55'}$
$\frac{a}{a'}1\frac{a}{a'}$	8	8	8	$7\chi VI$	16′	$\frac{a}{a'}=\frac{2'5}{25'}$	$5\chi3\,(3VI_7)^{s}_{22'}$
abc	8	8	9	$7\chi VI$	11′	$a=55',\ b=66',\ c=22'$	$4\chi1\,(1\chi'VI_7)$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abc	8	8	10	$7\chi VI$	11′	$a=55',\ b=22',\ c=66'$	$2(\chi 4)(1\chi' VI_7)$
abc	8	8	11	$7\chi VI$	11′	$a=66',\ b=55',\ c=22'$	$2(\chi 2)(1\chi' VI_7)$
abc	8	8	12	$7\chi VI$	11′	$a=66',\ b=22',\ c=55'$	$14(\chi 1)(1\chi' VI_7)$
$\frac{a}{a'}\,1\,\frac{a}{a'}$	8	8	13	$7\chi VI$	11′	$\frac{a}{a'}=\frac{55'}{22'}$	$4(\chi 2)(1\chi' VI_7)^{s}_{25}$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a'}{a}\,b$	8	8	14	$7\chi VI$	11′	$\frac{a}{a'}=\frac{55'}{66'},\ b=22'$	$6\chi 1(1\chi' VI_7)_{56}$
$a\,\frac{b}{b'}\,\frac{b}{b'}$	8	8	15	$6\chi VI$	11′	$a=88',\ \frac{b}{b'}=\frac{44'}{55'}$	$14(\chi 1)(1\chi' VI_6)^{c}_{45}$
$a\,\frac{b}{b'}\,\frac{b'}{b}$	8	8	16	$6\chi VI$	18′	$a=4'5,\ \frac{b}{b'}=\frac{45'}{1'8}$	$7\chi 1(3VI'_6)_{1'4}$
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{b}{b'}$	8	8	17	$6\chi VI$	15	$\frac{b}{b'}=\frac{1'5'}{4'8'}$	$2(\chi 6)(3VI_6)^{s}_{1'4'}$
$a\,\frac{b}{b'}\,\frac{b'}{b}$	8	8	18	$6\chi VI$	15	$a=4'8',\ \frac{b}{b'}=\frac{1'5'}{48}$	$7\chi 1(3VI_6)_{1'4}$
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{b}{b'}$	8	8	19	$6\chi VI$	14	$\frac{b}{b'}=\frac{1'4'}{5'8'}$	$14(\chi 1)(1\chi' VI'_6)^{s}_{1'5'}$
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{b'}{b}$	8	8	20	$6\chi VI$	14	$\frac{b}{b'}=\frac{58}{5'8'}$	$14(\chi 1)(1\chi' VI'_6)^{c}_{55'}$
$1\,\frac{b}{b'}\,\frac{b'}{b}$	8	8	21	$6\chi VI$	14′	$\frac{b}{b'}=\frac{5'8}{58'}$	$2(\chi 6)(3VI'_6)^{c}_{55'}$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a}{a'}\,\frac{a}{a'}$	8	8	1	$6\chi VII$	16′	$\frac{a}{a'}=\frac{25'}{1'6}$	$7\chi 1(3VII_6)_{1'2}$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a'}{a}\,\frac{a}{a'}$	8	8	2	$6\chi VII$	16′	$\frac{a}{a'}=\frac{25'}{2'5}$	$2(\chi 6)(3VII_6)^{s}_{22'}$
$\frac{a}{a'}\,\frac{a'}{a}\,\frac{a}{a'}$	8	8	3	$6\chi VII$	11′	$\frac{a}{a'}=\frac{22'}{55'}$	$14(\chi 1)(1\chi' VII_6)^{s}_{25}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abb	8	8	4	7XVII	15′	$a = 4'8,\ b = 1'5$	$2\,(\chi 6)\,(1\pi VII_7)^c$
abb	8	8	5	7XVII	15′	$a = 4'8,\ b = 48'$	$4\chi 3\,(1\pi VII)^c_7$
abb	8	8	6	7XVII	15′	$a = 48',\ b = 1'5$	$14\,(\chi 2)\,(1\pi VII_7)^c$
abb	8	8	7	7XVII	15′	$a = 48',\ b = 4'8$	$2\,(\chi 6)\,(1\pi VII_7)^c$
abb	8	8	8	7XVII	18′	$a = 1'8,\ b = 4'5$	$2\,(\chi 5)\,(3VII'_7)^c$
abb	8	8	9	7XVII	14′	$a = 5'8,\ b = 58'$	$3\,(\chi 4)\,(3VII'_7)^c$
abb	8	8	10	7XVII	18′	$a = 1'8,\ b = 45'$	$3\,(\chi 4)\,(3VII'_7)^{c'}$
abb	8	8	11	7XVII	18′	$a = 45',\ b = 4'5$	$2\,(\chi 5)\,(3VII'_7)^{c'}$
abb	8	8	12	7XVII	14′	$a = 1'4,\ b = 58'$	$3\,(\chi 3)\,(3VII'_7)^c$
abb	8	8	13	7XVII	18′	$a = 45',\ b = 1'8$	$3\,(\chi 3)\,(3VII'_7)^{c'}$
abb	8	8	14	7XVII	11′	$a = 88',\ b = 55'$	$14\,(\chi 1)\,(1\chi' VII_7)^c$
abb	8	8	15	7XVII	11′	$a = 88',\ b = 44'$	$2\,(\chi 4)\,(1\chi' VII_7)^c$
abb	8	8	16	7XVII	11′	$a = 44',\ b = 55'$	$2\,(\chi 2)\,(1\chi' VII_7)^c$
abb	8	8	17	7XVII	11′	$a = 44',\ b = 88'$	$4\chi 1\,(1\chi' VII_7)^c$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	18	7XVII	11′	$\frac{a}{a'} = \frac{44'}{55'},\ b = 88'$	$6\chi 1\,(1\chi' VII_7)^c_{45}$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	19	7XVII	18′	$\frac{a}{a'} = \frac{4'5}{45'}$	$5\chi 3\,(3VII'_7)^c_{44'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	20	7XVII	18′	$\frac{a}{a'} = \frac{4'5}{45'},\ b = 1'8$	$5\,(\chi 2)\,(3VII_7)^c_{44'}$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	21	7XVII	11′	$\frac{a}{a'} = \frac{44'}{55'}$	$4\,(\chi 2)\,(1\chi' VII_7)_{45}$
abb	8	8	22	7XVII	15	$a = 48,\ b = 4'8'$	$3\,(\chi 4)\,(3VII_7)^c$
abb	8	8	23	7XVII	15	$a = 48,\ b = 1'5'$	$2\,(\chi 5)\,(3VII_7)^c$
abb	8	8	24	7XVII	15	$a = 1'5',\ b = 4'8'$	$3\,(\chi 3)\,(3VII_7)^c$
abb	8	8	25	7XVII	14′	$a = 5'8,\ b = 58'$	$3\,(\chi 3)\,(3VII'_7)^{c''}$
abb	8	8	26	7XVII	14′	$a = 5'8,\ b = 1'4$	$3\,(\chi 3)\,(3VII'_7)^{c'''}$
abb	8	8	27	7XVII	14′	$a = 1'4,\ b = 5'8$	$3\,(\chi 4)\,(3VII'_7)^{c''}$
abb	8	8	28	7XVII	14′	$a = 1'4,\ b = 58'$	$3\,(\chi 4)\,(3VII'_7)^{c'''}$
abb	8	8	29	7XVII	14	$a = 58,\ b = 5'8'$	$2\,(\chi 4)\,(1\chi' VII'_7)^c$
abb	8	8	30	7XVII	14	$a = 58,\ b = 1'4'$	$14\,(\chi 1)\,(1\chi' VII'_7)^c$

Т а б л и ц а 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abb	8	8	31	7XVII	14	$a=1'4',\ b=58$	$2(\chi 2)(1\chi'\mathrm{VII}'_7)^c$
abb	8	8	32	7XVII	14	$a=1'4',\ b=5'8'$	$4\chi 1(1\chi'\mathrm{VII}'_7)^c$
abb	8	8	33	7XVII	14	$a=5'8',\ b=1'4'$	$2(\chi 2)(1\chi'\mathrm{VII}'_7)^c$
abb	8	8	34	7XVII	14	$a=5'8',\ b=58$	$14(\chi 1)(1\chi'\mathrm{VII}_7)^{c'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	8	8	35	7XVII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{4'8'}$	$5(\chi 2)(3\mathrm{VII}_7)_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	8	8	36	7XVII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{4'8'}$	$5\chi 3(3\mathrm{VII}_7)^s_{1'4'}$
$1\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}$	8	8	37	7XVII	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{5'8}{58'}$	$5\chi 3(3\mathrm{VII}'_7)^s_{55'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	8	8	38	7XVII	14	$\frac{a}{a'}=\frac{1'4'}{5'8'}$	$2(\chi 2)(1\chi'\mathrm{VII}'_7)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	8	8	39	7XVII	14	$\frac{a}{a'}=\frac{1'4'}{5'8'}$	$4(\chi 2)(1\chi'\mathrm{VII}'_7)^s_{1'5'}$
$1\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}$	8	8	40	7XVII	14	$\frac{a}{a'}=\frac{58}{5'8'}$	$4(\chi 2)(1\chi'\mathrm{VII}'_7)^s_{55'}$
$\frac{a}{a'}bb$	8	8	41	7XVII	18	$\frac{a}{a'}=\frac{45}{4'5'},\ b=1'8'$	$6\chi 1(1\chi'\mathrm{VII}'_7)^c_{44'}$

IV. Т е т р а г о н а л ь н а я с и н г о н и я

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	явная симметрия	симметрия связи	Символ системы
abc	9	4	1	9XVI	1	$a=5,\ b=7,\ c=3$	$(6)(1\mathrm{VI})$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	9	4	2	9XVI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7}{3}$	$(15)(1\mathrm{VI})^s_r$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	9	4	3	9XVI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{3}{7}$	$(16)(1\mathrm{VI})^s_l$
abb	9	4	1	9XVII	1	$a=3,\ b=7$	$(6)(1\mathrm{VII})$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	9	4	2	9XVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{7}$	$(15)(1\mathrm{VII})^s_r$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	9	4	3	9VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{3}$	(16) $(1VII)^s_l$
abc	10	8	1	9φVI	18	$a=45,\ b=67,\ c=23$	6 (φ2) (1χ′VI′)
abc	10	8	2	9φVI	14	$a=58,\ b=27,\ c=36$	6 (φ3) (1χ′VI′)
abb	10	8	1	9φVII	12	$a=34,\ b=78$	6(φ2) $(1\chi'VII)^c$
abb	10	8	2	9φVII	16	$a=38,\ b=47$	6 (φ3) $(1\chi'VII)^c$
abc	11	4	1	3πVI	1	$a=5,\ b=7',\ c=3'$	2π (1VI)
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	11	4	2	3πVI	1	$a=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{3'}{7'}$	3π $(1VI)_{3'7'}$
abb	11	4	1	3πVII	1	$a=3',\ b=7'$	2π $(1VII)^c$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	11	4	2	3πVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3'}{7'}$	3π $(1VII)^c_{3'7'}$
abc	12	8	1	9χVI	15′	$a=1'5,\ b=3'7,\ c=37'$	6 (χ2) (1πVI)
abc	12	8	2	9χVI	11′	$a=55',\ b=77',\ c=33'$	6 (χ1) (1χ′VI)
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	12	8	3	9χVI	15	$\frac{b}{b'}=\frac{1'5'}{3'7'}$	6 (χ2) $(3VI)^s_{1'3'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	12	8	4	9χVI	15	$a=3'7',\ \frac{b}{b'}=\frac{37}{1'5'}$	17 (χ1) $(3VI)_{1'3}$
abb	12	8	1	9χVII	15′	$a=37',\ b=3'7$	6 (χ2) $(1\pi VII)^c$
abb	12	8	2	9χVII	11′	$a=33',\ b=77'$	6 (χ1) $(1\chi'VII)^c$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	12	8	3	9χVII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{3'7'}$	6 (χ2) $(3VII)^s_{1'3'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	12	8	4	9χVII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'}{37}$	17 (χ1) $(3VII)_{1'3}$
abc	13	8	1	11VI	18′	$a=4'5,\ b=6'7,\ c=2'3$	(8) (3VI′)
abc	13	8	2	11VI	14′	$a=58',\ b=2'7,\ c=36'$	(18) (3VI′)
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	3	11VI	18′	$\frac{b}{b'}=\frac{6'7}{2'3}$	(19) $(3VI')^s_r$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	4	11VI	18′	$\frac{b}{b'}=\frac{2'3}{6'7}$	(20) $(3VI')^s_l$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	5	11VI	12′	$\frac{b}{b'}=\frac{78'}{34'}$	$(23)\,(3VI)^s_r$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	6	11VI	12′	$\frac{b}{b'}=\frac{34'}{78'}$	$(24)\,(3VI)^s_l$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	7	11VI	15	$\frac{b}{b'}=\frac{2'6'}{4'8'}$	$(18)\,(3VI)^s_{2'4'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	13	8	8	11VI	15	$a=4'8',\ \frac{b}{b'}=\frac{2'6'}{37}$	$(21)\,(3VI)_{2'3}$
abb	13	8	1	11VII	12′	$a=34',\ b=78'$	$(8)\,(3VII)^c$
abb	13	8	2	11VII	16′	$a=38',\ b=4'7$	$(18)\,(3VII)^c$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	13	8	3	11VII	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{34'}{78'}$	$(19)\,(3VII)^s_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	13	8	4	11VII	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{78'}{34'}$	$(20)\,(3VII)^s_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	13	8	5	11VII	18′	$\frac{a}{a'}=\frac{2'3}{6'7}$	$(23)\,(3VII')^s_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	13	8	6	11VII	18′	$\frac{a}{a'}=\frac{6'7}{2'3}$	$(24)\,(3VII')^s_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	13	8	7	11VII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{4'8'}{2'6'}$	$(18)\,(3VII)^s_{2'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}$	13	8	8	11VII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{4'8'}{37}$	$(21)\,(3VII)_{34'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	14	8	1	7δVI	12′	$a=56',\ \frac{b}{b'}=\frac{3'8}{47'}$	$5\,(\delta 1)\,(3VI)_{3'4}$
abc	14	8	2	7δVI	14	$a=58,\ b=2'7',\ c=3'6'$	$2\,(\delta 1)\,(1\chi'VI')$
abc	14	8	3	7δVI	18	$a=45,\ b=6'7',\ c=2'3'$	$4\delta\,(1\chi'VI')$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	14	8	4	7δVI	14	$a=58,\ \frac{b}{b'}=\frac{3'6'}{2'7'}$	$6\delta\,(1\chi'VI')_{2'3'}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	14	8	5	7δVI	15	$\frac{b}{b'}=\frac{3'7'}{2'6'}$	$5\delta 1\ (3VI)^{s}_{2'3'}$
abc	14	8	6	6δVI	14′	$a=58',\ b=27',\ c=3'6$	5δ3 (3VI′)
abc	14	8	7	6δVI	18′	$a=4'5,\ b=23',\ c=67'$	5δ1 (3VI′)
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	14	8	8	6δVI	15	$\frac{b}{b'}=\frac{3'7'}{4'8'}$	$2\ (\delta 2)\ (3VI)^{s}_{3'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	14	8	1	7δVII	18′	$\frac{a}{a'}=\frac{67'}{23'}$	$5\ (\delta 1)\ (3VII')_{26}$
abb	14	8	2	7δVII	16	$a=3'8',\ b=4'7'$	$2\ (\delta 1)\ (1\chi' VII)^{c}$
abb	14	8	3	7δVII	12	$a=3'4',\ b=7'8'$	$4\delta\ (1\chi' VII)^{c}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	14	8	4	7δVII	12	$\frac{a}{a'}=\frac{7'8'}{3'4'}$	$6\delta\ (1\chi' VII)_{1'8'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	14	8	5	7δVII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{4'8'}{3'7'}$	$5\delta 1\ (3VII)^{s}_{3'4'}$
abb	14	8	6	6δVII	16′	$a=3'8,\ b=47'$	$5\delta 3\ (3VII)^{c}$
abb	14	8	7	6δVII	12′	$a=3'4,\ b=7'8$	$5\delta 1\ (3VII)^{c}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	14	8	8	6δVII	15	$\frac{a}{a'}=\frac{26}{3'7'}$	$2\ (\delta 2)\ (3VII)^{s}_{23'}$
abc	15	16	1	11χVI	12′5′6	$a=1'458',\ b=2'3'67,\ c=236'7'$	$18\ (\chi 2)\ (3\chi VI)$
abc	15	16	2	11χVI	12′5′6	$a=1'458',\ b=236'7',\ c=2'3'67$	$8\ (\chi 3)\ (3\chi VI)$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	15	16	3	11χVI	14′58′	$a=23'67',\ \frac{b}{b'}=\frac{2'36'7}{1'45'8}$	$21\ (\chi 1)\ (6VI)_{1'2'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	15	16	4	11χVI	1256	$a=3'4'7'8',\ \frac{b}{b'}=\frac{3478}{1'2'5'6'}$	$21\ (\chi 2)\ (3\varphi'' VI)_{1'3}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	15	16	5	11χVI	1256	$\frac{b}{b'}=\frac{3'4'7'8'}{1'2'5'6'}$	$18\ (\chi 2)\ (3\varphi'' VI)^{s}_{1'3'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	15	16	6	11χVI	1458	$\frac{b}{b'}=\frac{2'3'6'7'}{1'4'5'8'}$	$18\ (\chi 4)\ (3\varphi' VI)^{s}_{1'2'}$

Т а б л и ц а 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
abc	15	16	7	$11\chi VI$	$11'44'$	$a=55'88'$, $b=33'66'$, $c=22'77'$	$8(\chi 1)(3\varphi'VI')$
abc	15	16	8	$11\chi VI$	$11'44'$	$a=55'88'$, $b=22'77'$, $c=33'66'$	$18(\chi 1)(3\varphi'VI')$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	15	16	9	$11\chi VI$	1357	$\frac{b}{b'}=\frac{1'3'5'7'}{2'4'6'8'}$	$7(\chi 4)(9VI)^{s}_{1'2'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	15	16	10	$11\chi VI$	$13'57'$	$a=24'68'$, $\frac{b}{b'}=\frac{1'35'7}{2'46'8}$	$21(\chi 1)(3\pi VI)^{s}_{1'2'}$
abb	15	16	1	$11\chi VII$	$125'6'$	$a=347'8'$, $b=3'4'78$	$18(\chi 2)(3\chi VII)^{c}$
abb	15	16	2	$11\chi VII$	$12'56'$	$a=34'7'8$, $b=3'478'$	$8(\chi 3)(3\chi VII)^{c}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	15	16	3	$11\chi VII$	$12'56'$	$\frac{a}{a'}=\frac{1'25'6}{34'78'}$	$21(\chi 1)(6VII)_{1'3}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	15	16	4	$11\chi VII$	1458	$\frac{a}{a'}=\frac{1'4'5'8'}{2367}$	$21(\chi 2)(3\varphi''VII)_{1'2}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	15	16	5	$11\chi VII$	1458	$\frac{a}{a'}=\frac{1'4'5'8'}{2'3'6'7'}$	$18(\chi 2)(3\varphi''VII)^{s}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	15	16	6	$11\chi VII$	1256	$\frac{a}{a'}=\frac{1'2'5'6'}{3'4'7'8'}$	$18(\chi 4)(3\varphi'VII)^{s}_{1'3'}$
abb	15	16	7	$11\chi VII$	$11'22'$	$a=33'44'$, $b=77'88'$	$8(\chi 1)(3\varphi'VII)^{c}$
abb	15	16	8	$11\chi VII$	$11'66'$	$a=33'88'$, $b=44'77'$	$18(\chi 1)(3\varphi'VII)^{c}$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	15	16	9	$11\chi VII$	1357	$\frac{a}{a'}=\frac{2'4'6'8'}{1'3'5'7'}$	$7(\chi 4)(9VII)^{s}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	15	16	10	$11\chi VII$	$13'57'$	$\frac{a}{a'}=\frac{24'68'}{1'35'7}$	$21(\chi 1)(3\pi VII)_{1'2}$
V. Гексагональная сингония							
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	20	12	1	$16\alpha VI$	11_11_2	$\frac{a}{a'}=\frac{5'5'_15'_2}{4'4'_14'_2}$	$14\alpha 1(13VI)^{s}_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	20	12	2	$16\alpha VII$	11_11_2	$\frac{a}{a'}=\frac{5'5'_15'_2}{4'4'_14'_2}$	$14\alpha 1(13VII)^{s}_{4'5'}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
VI. Кубическая сингония							
aa_1a_2	28	12	1	21VI	11_11_2	$a=2'5_26'_1$, $a_1=2'_156'_2$, $a_2=2'_25_16'$	(25) (13VI)
aa_1a_2	28	12	2	21VI	11_11_2	$a=2'_156'_2$, $a_1=2'_25_16'$, $a_2=2'5_26'_1$	(19) (13VI)
aa_1a_2	29	24	1	21χVI	$(15')_3$	$a=1'_22_12'5_266'_1$, $a_1=1'2_22'_156_16'_2$, $a_2=1'_122'_25_16_26'$	25 (χ1) (13α_1VI)
aa_1a_2	29	24	2	21χVI	$(15')_3$	$a=1'2_22'_156_16'_2$, $a_1=1'_122'_25_16_26'$, $a_2=1'_22_12'5_266'_1$	19χ1 (13αVI)
aa_1a_2	30	24	1	21δVI	$(18)_3$	$a=2'_13'_1456'_27'_2$, $a_1=2'_23'_24_15_16'7'$, $a_2=1'_22_12'5_266'_1$	19δ (13φVI)
aa_1a_2	31	24	1	24VI	$(14')_3$	$a=2'_13_256'_27_18'$, $a_1=2'_235_16'7_28'_1$, $a_2=2'3_15_26'_178'_2$	(9) (16VI)
aa_1a_2	32	48	1	24χVI	$(14'5'8)_3$	$a=1'2_22'_13_23'_1456_16'_27_17'_28'$, $a_1=1'_122'_233'_24_15_16_26'7_27'8'_1$, $a_2=1'_22_12'3_13'4_25_266'_177'_18'_2$	9 (χ2) (16αVI)
Гекса- и гептапараллелоэдры VI порядка							
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a}\frac{a}{a'}$	19	6	1	16VI	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{4'_1}$	(26) $(1VI)^s_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	2	16VI	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{4'_2}$	(27) $(1VI)^s_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	1	16VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{4'_1}$	(26) $(1VII)^s_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	2	16VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{4'_2}$	(27) $(1VII)^s_l$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
Гекса- и гептапараллеоэдры VIII порядка							
III. Ромбическая сингония							
dbc	8	8	1	7χVI	1	$d=1',\ b=2,\ c=6$	$7\chi1\ (1VI_7)$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	8	8	2	7χVI	1	$a=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{2'}{5'},\ \frac{c}{c'}=\frac{6'}{1'}$	$2\ (\chi5)\ (1VI_7)_{2'5'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	8	8	3	7χVI	1	$a=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{6'}{5'},\ \frac{c}{c'}=\frac{2'}{1'}$	$4\chi2\ (1VI_7)_{1'2'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	8	8	4	7χVI	1	$a=6,\ \frac{b}{b'}=\frac{6'}{5'},\ \frac{c}{c'}=\frac{1'}{2'}$	$3\ (\chi3)\ (1VI_7)_{1'2'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	8	8	5	7χVI	1	$a=6,\ \frac{b}{b'}=\frac{1'}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{6'}{5'}$	$14\ (\chi2)\ (1VI_7)_{1'2'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	8	8	6	7χVI	1	$a=2,\ \frac{b}{b'}=\frac{6'}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{5'}{1'}$	$2\ (\chi5)\ (1VI_7)_{1'5'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	8	8	7	7χVII	1	$a=2,\ \frac{b}{b'}=\frac{5'}{1'},\ \frac{c}{c'}=\frac{6'}{2'}$	$2\ (\chi6)\ (1VI_7)_{1'5'}$
abc	8	8	1	6χVII	1	$a=8,\ b=8',\ c=4$	$7\chi1\ (1VI_6)$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b'}$	8	8	2	6χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'},\ \frac{b}{b'}=\frac{4'}{5'}$	$2\ (\chi5)\ (1VII_6)_{1'8'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b'}$	8	8	3	6χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'},\ \frac{b}{b'}=\frac{8'}{5'}$	$4\chi2\ (1VII_6)_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	4	6χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{1'},\ \frac{b}{b'}=\frac{8'}{5'}$	$3\ (\chi3)\ (1VII_6)_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	5	6χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{8'},\ \frac{b}{b'}=\frac{1'}{4'}$	$14\ (\chi2)\ (1VII_6)_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	6	6χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{5'},\ \frac{b}{b'}=\frac{8'}{4'}$	$2\ (\chi5)\ (1VII_6)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	8	8	7	6χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{8'}{4'},\ \frac{b}{b'}=\frac{1'}{5'}$	$2\ (\chi6)\ (1VII_6)_{1'5'}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
				IV. Тетрагональная сингония			
abc	10	8	1	9φVI	1	$a=8,\ b=7,\ c=6$	17 (φ2) (1VI)
$d\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	10	8	2	9φVI	1	$d=4,\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{6},\ \frac{c}{c'}=\frac{3}{2}$	6 (φ4) $(1VI)_{23}$
abc	10	8	1	9φVII	1	$a=3,\ b=7,\ c=4$	17 (φ 2)(1VII)
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	10	8	2	9φVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{4},\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{8}$	6(φ4) $(1VII)_{34}$
dbc	12	8	1	9χVI	1	$d=1',\ b=7',\ c=3'$	6 (χ2) (1VI)
$d\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	12	8	2	9χVI	1	$d=5',\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'},\ \frac{c}{c'}=\frac{3}{3'}$	6 (χ2) $(1VI)_{33'}$
$d\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	12	8	3	9χVI	1	$d=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{1'},\ \frac{c}{c'}=\frac{3'}{5'}$	17 (χ1))$1VI)_{1'7'}$
abc	12	8	1	9χVII	1	$a=3,\ b=7,\ c=3'$	6 (χ2))1VII)
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	12	8	2	9χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{3'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'}$	6 (χ2) $(1VII)_{3'3'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	12	8	3	9χVII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{3'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{1'}$	17 (χ1) $(1VII)_{1'7'}$
abc	13	8	1	11VI	1	$d=8',\ b=3,\ c=7$	(21) (1VI)
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	13	8	2	11VI	1	$a=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{6'},\ \frac{c}{c'}=\frac{3}{2'}$	(18) $(1VI)_{2'3}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	13	8	3	11VI	1	$a=4',\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{6'},\ \frac{c}{c'}=\frac{2'}{3}$	(19) $(1VI)_r$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	13	8	4	11VI	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{3}{6'},\ \frac{c}{c'}=\frac{2'}{7}$	(20) $(1VI)_l$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	13	8	5	11VI	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{6'}{3}$	(23) $(1VI)_r$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	13	8	6	11VI	1	$a=4',\ \frac{b}{b'}=\frac{3}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{6'}{7}$	(24) $(1VI)_l$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	7	11VI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{6'}{8'}$	$(23)\,(1VI)_r^s$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	8	11VI	1	$\frac{b}{b'}=\frac{6'}{4'}$	$(24)\,(1VI)_l^s$
abc	13	8	1	11VII	1	$a=3,\ b=7,\ c=8'$	(21) (1VII)
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	13	8	2	11VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{4'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{8'}$	$(18)\,(1VII)_{34'}^s$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	3	11VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{4'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{8'}$	$(19)\,(1VII)_r$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	4	11VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{4'},\ \frac{b}{b'}=\frac{3}{8'}$	$(20)\,(1VII)_l$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	5	11VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{8'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{4'}$	$(23)\,(1VII)_r$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	13	8	6	11VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7}{8'},\ \frac{b}{b'}=\frac{3}{4'}$	$(24)\,(1VII)_l$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	13	8	7	11VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{6'}{4'}$	$(23)\,(1VII)_r^s$
$\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}\frac{a'}{a}$	13	8	8	11VII	1	$\frac{a}{a'}=\frac{6'}{8'}$	$(24)\,(1VII)_l^s$
abc	14	8	1	7δVI	1	$d=4,\ b=7',\ c=3'$	$7\delta1\,(1VI_7)$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	2	7δVI	1	$d=4,\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{6'},\ \frac{c}{c'}=\frac{3'}{2'}$	$5\delta2\,(1VI_7)_{2'3'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	3	7δVI	1	$d=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{6'},\ \frac{c}{c'}=\frac{3'}{2'}$	$4\delta1\,(1VI_7)_{2'3'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	4	7δVI	1	$d=5,\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{2'},\ \frac{c}{c'}=\frac{3'}{6'}$	$2\,(\delta2)\,(1VI_7)_{2'7'}$
dbc	14	8	5	6δVI	1	$d=8',\ b=7',\ c=3'$	$5\,(\delta1)\,(1VI_6)$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$d\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	14	8	6	$6\delta VI$	1	$a=4',\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{6'},\ \frac{c}{c'}=\frac{3'}{2}$	$2\,(\delta 2)\,(1VI_6)_{23'}$
abc	14	8	1	$7\delta VII$	1	$a=4',\ b=7',\ c=8'$	$7\delta 1\,(1VII_7)$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	14	8	2	$7\delta VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3'}{4'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{8'}$	$5\delta 2\,(1VII_7)\S_{3'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	14	8	3	$7\delta VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{3'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{8'}$	$4\delta 1\,(1VII_7)_{3'4'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	14	8	4	$7\delta VII$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7'}{8'},\ \frac{b}{b'}=\frac{4'}{3'}$	$2\,(\delta 2)\,(1VII_7)_{3'4'}$
abc	14	8	5	$6\delta VII$	1	$a=8,\ b=7',\ c=4$	$5\,(\delta 1)\,(1VII_6)$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	14	8	6	$6\delta VII$	1	$a=\frac{3'}{4'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{8}$	$2\,(\delta 2)\,(1VII_6)\S_{3'4}$
abc	15	16	1	$11\chi VI$	15′	$a=4'8,\ b=3'7,\ c=2'6$	$21\,(\chi 1)\,(1\pi VI)$
abc	15	16	1	$11\chi VI$	18	$a=45,\ b=6'7',\ c=2'8'$	$21\,(\chi 2)\,(1\chi' VI')$
abc	15	16	1	$11\chi VI$	18′	$a=1'8,\ b=23',\ c=2'3$	$21\,(\chi 1)\,(3VI')$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	4	$11\chi VI$	14′	$a=5'8,\ \frac{b}{b'}=\frac{3'6}{36'},\ c=\frac{2'7}{27'}$	$8\,(\chi 4)\,(3VI')_{22'}$
$a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$	15	16	4	$11\chi VI$	11′	$a=55',\ \frac{b}{b'}=\frac{77'}{66'},\ \frac{c}{c'}=\frac{33'}{22'}$	$18\,(\chi 3)\,(1\chi' VI)_{23}$
abc	15	16	1	$11\chi VII$	15′	$a=37',\ b=3'7,\ c=48'$	$21\,(\chi 1)\,(1\pi VII)$
abc	15	16	2	$11\chi VII$	16	$a=38,\ b=47,\ c=3'8'$	$21\,(\chi 2)\,(1\chi' VII)$
abc	15	16	3	$11\chi VII$	16′	$a=4'7,\ b=47',\ c=38'$	$21\,(\chi 1)\,(3VII)$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	15	16	4	$11\chi VII$	14′	$\frac{a}{a'}=\frac{3'4}{34'},\ \frac{b}{b'}=\frac{7'8}{78'}$	$8\,(\chi 4)\,(3VII)_{33'}$
$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	15	16	5	$11\chi VII$	11′	$\frac{a}{a'}=\frac{33'}{44'},\ \frac{b}{b'}=\frac{77'}{88'}$	$18\,(\chi 3)\,(1\chi' VII)_{34}$

Таблица 5 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
VI. Кубическая сингония							
da_1a_2	29	24	1	21χVI	11_11_2	$d = 1'2_26_1,\ a_1 = 2'_25_16',$ $a_2 = 2'5_26'_1$	21χ1 (13VI)
da_1a_2	30	24	1	21δVI	11_11_2	$d = 3'47'_2,\ a_1 = 2'_25_16',$ $a_2 = 2'5'_26'_1$	21δ1 (13VI)
da_1a_2	31	24	1	24VI	11_11_2	$d = 3_27_18',\ a_1 = 2'5_26'_1,$ $a_2 = 2'5_26'_1$	(38) (13VI)
da_1a_2	32	48	1	24χVI	$(15')_3$	$a = 1'2_22'_156_16'_2,$ $a_1 = 1'_122'_25_16_26',$ $a_2 = 1'_22_12'5_266'_1$	(38) (χ2) (13αVI)
da_1a_2	32	48	2	24χVI	$(18)_3$	$a = 2'_13'_1456'_27'_2,$ $a_1 = 2'_23'_24_15_16'7',$ $a_2 = 2'3'4_25_26'_17'_1$	(38) (χ1) (13φVI)
aa_1a_2	30	24	1	20δVII	11_11_3	$a = 3'_24_17',\ a_1 = 3'4_27'_1,$ $a_2 = 3'_147'_2$	22 (δ1) (13VII)
aa_1a_2	31	24	1	23VII	11_11_2	$a = 37_28'_1,\ a_1 = 3_178',$ $a_2 = 3_27_18'$	(39) (13VII)
aa_1a_2	32	48	1	23χVII	$(15')_3$	$a = 33'_24_17_27'8'_1,$ $a_1 = 3_13'4_277'_18'_2,$ $a_2 = 3_23'_147_17'_28'$	39 (χ1) (13αVII)

Таблица 6

Тетрапараллелоэдры II и высшего порядков

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
				Тетрапараллелоэдры II порядка			
				I. Триклинная сингония			
$a11$	2	2	1	$1\pi IV$	1	$a=7'$	$1\pi\ (1IV)^s$
$1aa$	2	2	2	$1\pi IV$	1	$a=7'$	$1\pi\ (1IV)^v$
aaa	2	2	3	$1\pi IV$	1	$a=7'$	$1\pi\ (1IV)^h$
				II. Моноклинная сингония			
$a11$	3	2	1	$2IV$	1	$a=7$	$(1)\ (1IV_2)^s$
$1aa$	3	2	2	$2IV$	1	$a=7$	$2\ (1IV_2)^\nu$
aaa	3	2	3	$2IV$	1	$a=7$	$3\ (1IV_2)^h$
$a11$	3	2	4	$3IV$	1	$a=2'$	$3\ (1IV_3)^s$
$1a1$	3	2	5	$3IV$	1	$a=2'$	$(1)\ (1IV_3)^\nu$
$aa1$	3	2	6	$3IV$	1	$a=2'$	$3\ (1IV_3)^h$
$a11$	3	2	7	$3IV'$	1	$a=8'$	$3\ (1IV_3')^s$
$1a1$	3	2	8	$3IV'$	1	$a=8'$	$(1)\ (1IV_3')^\nu$
$aa1$	3	2	9	$3IV'$	1	$a=8'$	$3\ (1IV_3')^h$
$a11$	4	2	1	$1\chi IV$	1	$a=1'$	$1\chi\ (1IV_2)^s$
$1aa$	4	2	2	$1\chi IV$	1	$a=1'$	$1\chi 1\ (1IV_2)^\nu$
aaa	4	2	3	$1\chi IV$	1	$a=1'$	$1\chi'\ (1IV_2)^h$
$a11$	4	2	4	$1\chi' IV$	1	$a=8$	$1\chi 1\ (1IV_3)^s$
$1a1$	4	2	5	$1\chi' IV$	1	$a=8$	$1\chi 1\ (1IV_3)^\nu$
$aa1$	4	2	6	$1\chi' IV$	1	$a=8$	$1\chi' 1\ (1IV_3)^h$
$a11$	4	2	7	$1\chi' IV$	1	$a=2$	$1\chi 1\ (1IV_3')^s$
$1a1$	4	2	8	$1\chi' IV$	1	$a=2$	$1\chi 1\ (1IV_3')^\nu$
$aa1$	4	2	9	$1\chi' IV$	1	$a=2$	$1\chi' 1\ (1IV_3')^h$
$a11$	5	4	1	$2\chi IV$	17'	$a=1'7$	$1\ (\chi 1)\ (1\pi IV_2)^s$
$1aa$	5	4	2	$2\chi IV$	17'	$a=1'7$	$2\chi 1\ (1\pi IV_2)^\nu$
aaa	5	4	3	$2\chi IV$	17'	$a=1'7$	$3\chi\ (1\pi IV_2)^h$
$a11$	5	4	4	$2\chi IV$	17	$a=1'7'$	$2\chi\ (2IV_2)^s$
$1aa$	5	4	5	$2\chi IV$	17	$a=1'7'$	$3\chi 1\ (2IV_2)^\nu$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
aaa	5	4	6	2χIV	17	$a = 1'7'$	$3\chi\ (2IV_2)^h$
*a*11	5	4	7	2χIV	11′	$a = 77'$	$1\ (\chi 1)\ (1\chi IV_2)^g$
1*aa*	5	4	8	2χIV	11′	$a = 77'$	$2\chi\ (1\chi IV_2)^v$
aaa	5	4	9	2χIV	11′	$a = 77'$	$3\chi\ (1\chi IV_2)^h$
*a*11	5	4	10	3χIV	17′	$a = 2'8$	$2\chi 1\ (1\pi IV_2)^g$
1*a*1	5	4	11	3χIV	17′	$a = 2'8$	$1\ (\chi 2)\ (1\pi IV_3)^v$
*aa*1	5	4	12	3χIV	17′	$a = 2'8$	$3\chi 1\ (1\pi IV_3)^h$
*a*11	5	4	13	3χIV	12′	$a = 7'8$	$3\chi 1\ (3IV_3)^g$
1*a*1	5	4	14	3χIV	12′	$a = 7'8$	$2\chi 1\ (3IV_3)^v$
*aa*1	5	4	15	3χIV	12′	$a = 7'8$	$3\chi 1\ (3IV_3)^h$
*a*11	5	4	16	3χIV	18	$a = 2'7'$	$3\chi\ (1\chi' IV_3)^g$
1*a*1	5	4	17	3χIV	18	$a = 2'7'$	$1\ (\chi 1)\ (1\chi' IV_3)^v$
*aa*1	5	4	18	3χIV	18	$a = 2'7'$	$3\chi\ (1\chi' IV_3)^h$
*a*11	5	4	19	3χIV′	17′	$a = 28'$	$3\chi 1\ (1\pi IV_3)^g$
1*a*1	5	4	20	3χIV′	17′	$a = 28'$	$1\ (\chi 2)\ (1\pi IV_3)^v$
*aa*1	5	4	21	3χIV′	17′	$a = 28'$	$3\chi 1\ (1\pi IV_3)^h$
*a*11	5	4	22	3XIV′	18′	$a = 27'$	$3\chi 1\ (3IV'_3)^g$
1*a*1	5	4	23	3χIV′	18′	$a = 27'$	$2\chi 1\ (3IV'_3)^v$
*aa*1	5	4	24	3χIV′	18′	$a = 27'$	$3\chi 1\ (3IV'_3)^h$
*a*11	5	4	25	3χIV′	12	$a = 7'8'$	$3\chi\ (1\chi' IV'_3)^g$
1*a*1	5	4	26	3χIV′	12	$a = 7'8'$	$1\ (\chi 1)\ (1\chi' IV'_3)^v$
*aa*1	5	4	27	3χIV′	12	$a = 7'8'$	$3\chi\ (1\chi' IV'_3)^h$
				III. Ромбическая сингония			
*a*11	6	4	1	5IV	17	$a = 2'8'$	$5\ (2IV)^g$
1*a*1	6	4	2	5IV	17	$a = 2'8'$	$(2)\ (2IV)^v$
*aa*1	6	4	3	5IV	17	$a = 2'8'$	$6\ (2IV)^h$
*a*11	6	4	4	5IV	12	$a = 78'$	$(4)\ (3IV)^g$
1*a*1	6	4	5	5IV	12′	$a = 78'$	$(3)\ (3IV)^v$
*aa*1	6	4	6	5IV	12′	$a = 78'$	$(5)\ (3IV)^h$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$a11$	6	4	7	5IV	18′	$a = 2'7$	$(4)\,(3\mathrm{IV}')^{s}$
$1a1$	6	4	8	5IV	18′	$a = 2'7$	$(3)\,(3\mathrm{IV}')^{v}$
$aa1$	6	4	9	5IV	18′	$a = 2'7$	$(5)\,(3\mathrm{IV}')^{h}$
$a11$	7	4	1	$2\varphi'\mathrm{IV}$	17	$a = 28$	$2\varphi'1\,(3\mathrm{IV}_2)^{s}$
$1a1$	7	4	2	$2\varphi'\mathrm{IV}$	17	$a = 28$	$2\varphi5\,(3\mathrm{IV}_2)^{v}$
$aa1$	7	4	3	$2\varphi'\mathrm{IV}$	17	$a = 28$	$3\varphi'2\,(3\mathrm{IV}_2)^{h}$
$a11$	7	4	4	$2\varphi'\mathrm{IV}$	12	$a = 78$	$1\,(\varphi5)\,(1\chi'\mathrm{IV}_2')^{s}$
$1a1$	7	4	5	$2\varphi'\mathrm{IV}$	12	$a = 78$	$2\varphi2\,(1\chi'\mathrm{IV}_2')^{v}$
$aa1$	7	4	6	$2\varphi'\mathrm{IV}$	12	$a = 78$	$3\varphi'1\,(1\chi'\mathrm{IV}_2')^{h}$
$a11$	7	4	7	$2\varphi'\mathrm{IV}$	18	$a = 27$	$1\,(\varphi5)\,(1\chi'\mathrm{IV}_2)^{s}$
$1a1$	7	4	8	$2\varphi'\mathrm{IV}$	18	$a = 27$	$2\varphi2\,(1\chi'\mathrm{IV}_2)^{v}$
$aa1$	7	4	9	$2\varphi'\mathrm{IV}$	18	$a = 27$	$3\varphi'1\,(1\chi'\mathrm{IV}_2)^{h}$
$a11$	7	4	10	$3\varphi\mathrm{IV}$	18′	$a = 1'8$	$3\varphi2\,(3\mathrm{IV}_3')^{s}$
$1a1$	7	4	11	$3\varphi\mathrm{IV}$	18′	$a = 1'8$	$2\varphi3\,(3\mathrm{IV}_3')^{v}$
$aa1$	7	4	12	$3\varphi\mathrm{IV}$	18′	$a = 1'8$	$3\varphi'1\,(3\mathrm{IV}_3')^{h}$
$a11$	7	4	13	$3\varphi\mathrm{IV}$	11′	$a = 88'$	$3\varphi2\,(1\chi\mathrm{IV}_3)^{s}$
$1a1$	7	4	14	$3\varphi\mathrm{IV}$	11′	$a = 88'$	$1\,(\varphi1)\,(1\chi\mathrm{IV}_3)^{v}$
$aa1$	7	4	15	$3\varphi\mathrm{IV}$	11′	$a = 88'$	$3\varphi'1\,(1\chi\mathrm{IV}_3)^{h}$
$a11$	7	4	16	$3\varphi\mathrm{IV}$	18	$a = 1'8'$	$3\varphi\,(1\chi'\mathrm{IV}_3)^{s}$
$1a1$	7	4	17	$3\varphi\mathrm{IV}$	18	$a = 1'8'$	$1\,(\varphi2)\,(1\chi'\mathrm{IV}_3)^{v}$
$aa1$	7	4	18	$3\varphi\mathrm{IV}$	18	$a = 1'8'$	$3\varphi'\,(1\chi'\mathrm{IV}_3)^{h}$
$a11$	7	4	19	$3\varphi\mathrm{IV}'$	12′	$a = 1'2$	$3\varphi2\,(3\mathrm{IV}_3)^{s}$
$1a1$	7	4	20	$3\varphi\mathrm{IV}'$	12′	$a = 1'2$	$2\varphi3\,(3\mathrm{IV}_3)^{v}$
$aa1$	7	4	21	$3\varphi\mathrm{IV}'$	12′	$a = 1'2$	$3\varphi'1\,(3\mathrm{IV}_3)^{h}$
$a11$	7	4	22	$3\varphi\mathrm{IV}'$	11′	$a = 22'$	$3\varphi2\,(1\chi\mathrm{IV}_3)^{s}$
$1a1$	7	4	23	$3\varphi\mathrm{IV}'$	11′	$a = 22'$	$1\,(\varphi1)\,(1\chi\mathrm{IV}_3)^{v}$
$aa1$	7	4	24	$3\varphi\mathrm{IV}'$	11′	$a = 22'$	$3\varphi'1\,(1\chi\mathrm{IV}_3)^{h}$
$a11$	7	4	25	$3\varphi\mathrm{IV}'$	12	$a = 1'2'$	$3\varphi\,(1\chi'\mathrm{IV}_3')^{s}$
$1a1$	7	4	26	$3\varphi\mathrm{IV}'$	12	$a = 1'2'$	$1\,(\varphi2)\,(1\chi'\mathrm{IV}_3')^{v}$
$aa1$	7	4	27	$3\varphi\mathrm{IV}'$	12	$a = 1'2'$	$3\varphi'\,(1\chi'\mathrm{IV}_3')^{h}$
$a11$	8	8	1	$5\chi\mathrm{IV}$	11′77′	$a = 22'88'$	$5\chi1\,(2\chi\mathrm{IV})^{s}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
1*a*1	8	8	2	5χIV	11′77′	*a* = 22′88′	2 (χ1) (2χIV)^{v}
*aa*1	8	8	3	5χIV	11′77′	*a* = 22′88′	6χ1 (2χIV)^{h}
*a*11	8	8	4	5χIV	12′7′8	*a* = 1′278′	4 (χ1) (3χIV)^{s}
1*a*1	8	8	5	5χIV	12′7′8	*a* = 1′278′	3 (χ2) (3χIV)^{v}
*aa*1	8	8	6	5χIV	12′7′8	*a* = 1′278′	5 (χ1) (3χIV)^{h}
*a*11	8	8	7	5χIV	127′8′	*a* = 1′2′78	4 (χ1) (3χIV′)^{s}
1*a*1	8	8	8	5χIV	127′8′	*a* = 1′2′78	3 (χ2) (3χIV′)^{v}
*aa*1	8	8	9	5χIV	127′8′	*a* = 1′2′78	5 (χ1) (3χIV)^{h}
*a*11	8	8	10	5χIV	12′78′	*a* = 1′27′8	5χ1 (5IV)^{s}
1*a*1	8	8	11	5χIV	12′78′	*a* = 1′27′8	4χ2 (5IV)^{v}
*aa*1	8	8	12	5χIV	12′78′	*a* = 1′27′8	6χ1 (5IV)^{h}
*a*11	8	8	13	5χIV	1278	*a* = 1′2′7′8′	5χ (3φ′IV)^{s}
1*a*1	8	8	14	5χIV	1278	*a* = 1′2′7′8′	2 (χ3) (3φ′IV)^{v}
*aa*1	8	8	15	5χIV	1278	*a* = 1′2′7′8′	6χ (3φ′IV)^{h}
*a*11	8	8	16	5χIV	11′22′	*a* = 77′88′	4 (χ1) (3φIV′)^{s}
1*a*1	8	8	17	5χIV	11′22′	*a* = 77′88′	3 (χ1) (3φIV′)^{v}
*aa*1	8	8	18	5χIV	11′22′	*a* = 77′88′	5 (χ1) (3φIV′)^{h}
*a*11	8	8	19	5χIV	11′88′	*a* = 22′77′	4 (χ1) (3φIV)^{s}
1*a*1	8	8	20	5χIV	11′88′	*a* = 22′77′	3 (χ1) (3φIV)^{v}
*aa*1	8	8	21	5χIV	11′88′	*a* = 22′77′	5 (χ1) (3φIV)^{h}
V. Гексагональная сингония							
*a*11	17	6	1	12φIV	159	*a* = 4812	12φ1 (12IV)^{s}
*a*11	17	6	2	12φ′IV	159	*a* = 2610	12φ′1 (12 IV)^{s}
*a*11	18	6	1	12*a*IV	159	*a* = 3′7′11′	12*a* (12IV)^{s}
*a*11	19	6	1	14IV	159	*a* = 2′6′10′	14 (12IV)^{s}
*a*11	19	6	2	15IV	159	*a* = 4′8′12′	15 (12IV)^{s}
*a*11	20	12	1	14*a*IV	1458912	*a* = 2′3′6′7′10′11′	14*a* (12φIV)^{s}
*a*11	20	12	2	14*a*IV	13′57′911′	*a* = 2′46′810′12	14*a*1 (12αIV)^{s}
*a*11	20	12	3	14*a*IV	12′56′910′	*a* = 3′47′811′12	14*a*1 (14IV)^{s}
*a*11	20	12	4	15*a*IV	1256910	*a* = 3′4′7′8′11′12′	15*a* (12φIV)^{s}

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип 1 порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
*a*11	20	12	5	15*a*IV	13′57′911′	*a* = 24′68′1012′	15*a*1 (12*a*IV)^{s}
*a*11	20	12	6	15*a*IV	14′58′912′	*a* = 23′67′1011′	15*a*1 (15IV)^{s}
*a*11	21	6	1	17IV	159	*a* = 3711	(28) (12IV)^{s}
*a*11	22	12	1	17φIV	1357911	*a* = 24681012	17φ1 (17IV)^{s}
*a*11	22	12	2	17φIV	1458912	*a* = 23671011	28 (φ1) (12φIV)^{s}
*a*11	22	12	3	17φIV	1256910	*a* = 34781112	28 (φ2) (12φ′IV)^{s}
*a*11	23	6	1	12πIV	159	*a* = 1′5′9′	12π (12IV)^{s}
*a*11	24	12	1	17χIV	13′57′911′	*a* = 1′35′79′11	28 (χ1) (12*a*IV)^{s}
*a*11	24	12	2	17χIV	1357911	*a* = 1′3′5′7′9′11′	17χ (17IV)^{s}
*a*11	24	12	3	17χIV	11′55′99′	*a* = 33′77′1111′	28 (χ1) (12πIV)^{s}
*a*11	25	12	1	18IV	12′56′910′	*a* = 34′78′1112′	(33) (14IV)^{s}
*a*11	25	12	2	18IV	14′58′912′	*a* = 2′36′710′11	(33) (15IV)^{s}
*a*11	25	12	3	18IV	1357911	*a* = 2′4′6′8′10′12′	18 (17IV)^{s}
*a*11	26	12	1	14πIV	12′56′910′	*a* = 1′25′69′10	14π1 (14IV)^{s}
*a*11	26	12	2	14πIV	1256910	*a* = 1′2′5′6′9′10′	14π (12φ′IV)^{s}
*a*11	26	12	3	14πIV	11′55′99′	*a* = 22′66′1010′	14π1 (12πIV)^{s}
*a*11	26	12	4	15πIV	14′58′912′	*a* = 1′45′89′12	15π1 (15IV)^{s}
*a*11	26	12	5	15πIV	1458912	*a* = 1′4′5′8′9′12′	15π (12φIV)^{s}
*a*11	26	12	6	15πIV	11′55′99′	*a* = 44′88′1212′	15π (12πIV)^{s}
*a*11	27	24	1	18χIV	12′3′456′7′ 8910′11′12	*a* = 1′234′5′678′9′ 101112′	33 (χ1) (14*a*IV)^{s}
*a*11	27	24	2	18χIV	123′4′567′8′ 91011′12′	*a* = 1′2′345′6′789′10′ 1112	33 (χ2) (15*a*IV)^{s}
*a*11	27	24	3	18χIV	12345678 9101112	*a* = 1′2′3′4′5′6′7′8′9′ 10′11′12′	18χ (17φIV)^{s}
*a*11	27	24	4	18χIV	11′33′55′77′ 99′1111′	*a* = 22′44′66′88′1010′ 1212′	18χ1 (17χIV)^{s}
*a*11	27	24	5	18χIV	12′34′56′78′ 910′11	*a* = 1′23′45′67′89′10 11′12	18χ1 (18IV)^{s}
*a*11	27	24	6	18χIV	11′22′55′66′ 99′1010′	*a* = 33′44′77′88′1111′ 1212′	33 (χ2) (14πIV)^{s}
*a*11	27	24	7	18χIV	11′44′55′88′ 99′1212′	*a* = 22′33′66′77′1010′ 1111′	33 (χ1) (15πIV)^{s}

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
Системы тетрапараллелоэдров III порядка							
$\frac{a}{a'}11$	16	3	1	12IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{9}{5}$	$(10)\,(1\text{IV})_r$
$\frac{a}{a'}11$	16	3	2	12IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{9}$	$(11)\,(1\text{IV})_l^s$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	16	3	3	12IV	1	$\frac{b}{b'}=\frac{5}{9}$	$12\,(1\text{IV})^s$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}$	16	3	4	12IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{9}{5}$	$13\,(1\text{IV})_r$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a'}{a}$	16	3	5	12IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5}{9}$	$13\,(1\text{IV})_l$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	17	6	1	12φIV	18	$\frac{b}{b'}=\frac{5\ 12}{4\ 9}$	$12\varphi'\,(1\chi'\text{IV})^c$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	19	6	1	15IV	18′	$\frac{b}{b'}=\frac{5\ 12'}{4'\ 9}$	$14\,(4\text{IV}')^c$
$\frac{a}{a'}11$	21	6	1	17IV	17	$\frac{a}{a'}=\frac{3\ 9}{5\ 11}$	$(29)\,(3\text{IV})_r^s$
$\frac{a}{a'}11$	21	6	2	17IV	17	$\frac{a}{a'}=\frac{5\ 11}{3\ 9}$	$(30)\,(3\text{IV})_l^s$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	23	6	1	12πIV	11′	$\frac{b}{b'}=\frac{55'}{99'}$	$12\pi\,(1\chi\text{IV})_{59}^c$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	24	12	1	17χIV	11′77′	$\frac{b}{b'}=\frac{55'\ 11\ 11'}{33'\ 9\ 9'}$	$28\,(\chi1)\,(2\chi\text{IV})_{35}^c$
$\frac{a}{a'}11$	25	12	1	18IV	12′78′	$\frac{a}{a'}=\frac{34'\ 9\ 10'}{56'11\ 12'}$	$(34)\,(5\text{IV})_r^s$
$\frac{a}{a'}11$	25	12	2	18IV	12′78′	$\frac{a}{a'}=\frac{56'11\ 12'}{34'\ 9\ 10'}$	$(35)\,(5\text{IV})_l^s$
$1\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	26	12	1	15πIV	11′88′	$\frac{b}{b'}=\frac{55'\ 12\ 12'}{44'\ 9\ 9'}$	$14\pi\,(3\varphi\text{IV})_{45}^c$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
Тетрапараллелоэдры IV порядка							
II. Моноклинная сингония							
$ab1$	5	4	1	$2\chi IV$	1	$a=7',\ b=7$	$2\chi 1\,(1IV_2)^h$
$ab1$	5	4	2	$2\chi IV$	1	$a=7',\ b=1'$	$1\,(\chi 2)\,(1IV_2)^h$
$ab1$	5	4	3	$2\chi IV$	1	$a=7,\ b=7'$	$1\,(\chi 2)\,(1IV_2)^{h'}$
$ab1$	5	4	4	$2\chi IV$	1	$a=7,\ b=1'$	$1\,(\chi 2)\,(1IV_2)^{h''}$
$ab1$	5	4	5	$2\chi IV$	1	$a=1',\ b=7'$	$1\,(\chi 1)\,(1IV_2)^h$
$ab1$	5	4	6	$2\chi IV$	1	$a=1',\ b=7$	$2\chi\,(1IV_2)^h$
$1bc$	5	4	7	$2\chi IV$	1	$b=7',\ c=7$	$2\chi 1\,(1IV_2)^c$
abc	5	4	8	$2\chi IV$	1	$a=7',\ b=7',\ c=7$	$3\chi 1\,(1IV_2)$
abc	5	4	9	$2\chi IV$	1	$a=7,\ b=1',\ c=7$	$3\chi 1\,(1IV_2)'$
abc	5	4	10	$2\chi IV$	1	$a=1',\ b=1'.\ c=7$	$3\chi\,(1IV_2)$
$\frac{a}{a'}\,11$	5	4	11	$2\chi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7'}{1'}$	$1\,(\chi 1)\,(1IV_2)^g$
$\frac{a}{a'}\,b1$	5	4	12	$2\chi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7'}{1'},\ b=7$	$3\chi\,(1IV_2)^h$
$1\,\frac{b}{b'}\,1$	5	4	13	$2\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{7}$	$2\chi 1\,(1IV_2)^v$
$a\,\frac{b}{b'}\,1$	5	4	14	$2\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{7},\ a=1'$	$3\chi\,(1IV_2)^{h'}$
$1\,\frac{b}{b'}\,c$	5	4	15	$2\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{7},\ c=1'$	$2\chi 1\,(1IV_2)^{c'}$
$a\,\frac{b}{b'}\,a$	5	4	16	$2\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{7},\ a=1'$	$3\chi\,(1IV_2)$
$ab1$	5	4	17	$3\chi IV$	1	$a=7',\ b=2'$	$1\,(\chi 2)\,(1IV_3)^h$
$ab1$	5	4	18	$3\chi IV$	1	$a=7',\ b=8$	$1\,(\chi 2)\,(1IV_3)^{h'}$
$ab1$	5	4	19	$3\chi IV$	1	$a=2',\ b=7'$	$2\chi 1\,(1IV_3)^h$
$ab1$	5	4	20	$3\chi IV$	1	$a=2',\ b=8$	$2\chi 1\,(1IV_3)^{h'}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$ab1$	5	4	21	$3\chi IV$	1	$a=8,\ b=7'$	$1\ (\chi2)\ (1IV_3)^{h''}$
$ab1$	5	4	22	$3\chi IV$	1	$a=8,\ b=2'$	$1\ (\chi2)\ (1IV_3)^{h'''}$
$\frac{a}{a'}11$	5	4	23	$3\chi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7'}{2'}$	$3\chi1\ (1IV_3)^{8}_{2'7'}$
$\frac{a}{a'}b1$	5	4	24	$3\chi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7'}{2'},\ b=8$	$3\chi1\ (1IV_3)^{h}_{2'7'}$
$1\frac{b}{b'}1$	5	4	25	$3\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{8}$	$1\ (\chi2)\ (1IV_3)^{\nu}_{7'8}$
$a\frac{b}{b'}1$	5	4	26	$3\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{8},\ a=2'$	$3\chi1\ (1IV_3)^{h}_{7'8}$
$1\frac{b}{b'}1$	5	4	27	$3\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{2'}$	$1\ (\chi2)\ (1IV)^{\nu}_{2'7'}$
$a\frac{b}{b'}1$	5	4	28	$3\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{2'},\ a=8$	$1\ (\chi2)\ (1IV_3)^{h}_{2'7'}$
$a\frac{b}{b'}1$	5	4	29	$3\chi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{2'},\ a=2'$	$3\chi1\ (1IV_3)^{h}_{2'7'}$
$ab1$	5	4	30	$3\chi IV'$	1	$a=7',\ b=8'$	$1\ (\chi2)\ (1IV'_3)^{h}$
$ab1$	5	4	31	$3\chi IV'$	1	$a=7',\ b=2$	$1\ (\chi2)\ (1IV'_3)^{h'}$
$ab1$	5	4	32	$3\chi IV'$	1	$a=8',\ b=7'$	$2\chi1\ (1IV'_3)^{h}$
$ab1$	5	4	33	$3\chi IV'$	1	$a=8',\ b=2$	$2\chi1\ (1IV'_3)^{h'}$
$ab1$	5	4	34	$3\chi IV'$	1	$a=2,\ b=7'$	$1\ (\chi2)\ (1IV'_3)^{h''}$
$ab1$	5	4	35	$3\chi IV'$	1	$a=2,\ b=8'$	$1\ (\chi2)\ (1IV'_3)^{h'''}$
$\frac{a}{a'}11$	5	4	36	$3\chi IV'$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7'}{8'}$	$3\chi1\ (1IV'_3)^{8}_{7'8'}$
$\frac{a}{a'}b1$	5	4	37	$3\chi IV'$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{7'}{8'},\ b=2$	$3\chi1\ (1IV'_3)^{h}_{7'8'}$
$1\frac{b}{b'}1$	5	4	38	$3\chi IV'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{2}$	$1\ (\chi2)\ (1IV'_3)^{\nu}_{27'}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a\frac{b}{b'}1$	5	4	39	$3\chi IV'$	1	$\frac{b'}{b}=\frac{7'}{2}$, $a=8'$	$3\chi 1\ (1IV'_3)^h_{27'}$
$1\frac{b}{b'}1$	5	4	40	$3\chi IV'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{8'}$	$1\ (\chi 2)\ (1IV'_3)^{\nu}_{7'8'}$
$a\frac{b}{b'}1$	5	4	41	$3\chi IV'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{8'}$, $a=2$	$1\ (\chi 2)\ (1IV'_3)^h_{7'8'}$
$a\frac{b}{b'}1$	5	4	42	$3\chi IV'$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7'}{8'}$, $a=7'$	$1\ (\chi 2)\ (1IV'_3)^{h'}_{7'8'}$
III. Ромбическая сингония							
$ab1$	6	4	1	5IV	1	$a=7$, $b=2'$	$(14)\ (1IV)^h$
$ab1$	6	4	2	5IV	1	$a=7$, $b=8'$	$(14)\ (1IV)^{h'}$
$ab1$	6	4	3	5IV	1	$a=2'$, $b=7$	$(3)\ (1IV)^h$
$ab1$	6	4	4	5IV	1	$a=8'$, $b=7$	$(3)\ (1IV)^{h'}$
$ab1$	6	4	5	5IV	1	$a=2'$, $b=8'$	$(2)\ (1IV)^h$
$ab1$	6	4	6	5IV	1	$a=8'$, $b=2'$	$(2)\ (1IV)^{h'}$
$\frac{a}{a'}11$	6	4	7	5IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{8'}$	$(4)\ (1IV)^s_{2'8'}$
$\frac{a}{a'}b1$	6	4	8	5IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{8'}$, $b=7$	$(5)\ (1IV)^h_{2'8'}$
$1\frac{b}{b'}1$	6	4	9	5IV	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2'}{7}$	$(2)\ (1IV)^{\nu}_{2'7}$
$1\frac{b}{b'}1$	6	4	10	5IV	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8'}{7}$	$(2)\ (1IV)^{\nu}_{78'}$
$a\frac{b}{b'}1$	6	4	11	5IV	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8'}{7}$, $a=2'$	$(4)\ (1IV)^h_{18'}$
$a\frac{b}{b'}1$	6	4	12	5IV	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2'}{7}$, $a=8'$	$(4)\ (1IV)^h_{2'7}$
$ab1$	7	4	1	$2\varphi' IV$	1	$a=7$, $b=2$	$1\ (\varphi 4)\ (1IV_2)^h$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$ab1$	7	4	2	$2\varphi'IV$	1	$a=7,\ b=8$	$1\ (\varphi4)\ (1IV_2)^{h'}$
$ab1$	7	4	3	$2\varphi'IV$	1	$a=2,\ b=7$	$2\varphi3\ (1IV_2)^{h}$
$ab1$	7	4	4	$2\varphi'IV$	1	$a=8,\ b=7$	$2\varphi3\ (1IV_2)^{h'}$
$ab1$	7	4	5	$2\varphi'IV$	1	$a=2,\ b=8$	$1\ (\varphi3)\ (1IV_2)^{h}$
$ab1$	7	4	6	$2\varphi'IV$	1	$a=8,\ b=2$	$1\ (\varphi3)\ (1IV_2)^{h'}$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	7	$2\varphi'IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{7}$	$2\varphi5\ (1IV_2)^{\nu}_{27}$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	8	$2\varphi'IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7}{8}$	$2\varphi5\ (1IV_2)^{\nu}_{78}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	9	$2\varphi'IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7}{8},\ a=2,$	$3\varphi3\ (1IV_2)^{h}_{78}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	10	$2\varphi'IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{7},\ a=8$	$3\varphi3\ (1IV_2)^{h}_{27}$
$ab1$	7	4	11	$3\varphi IV$	1	$a=8',\ b=1'$	$2\varphi4\ (1IV_3)^{h}$
$ab1$	7	4	12	$3\varphi IV$	1	$a=8',\ b=8$	$2\varphi3\ (1IV_3)^{h}$
$ab1$	7	4	13	$3\varphi IV$	1	$a=1',\ b=8'$	$1\ (\varphi2)\ (1IV_3)^{h}$
$ab1$	7	4	14	$3\varphi IV$	1	$a=1',\ b=8$	$1\ (\varphi1)\ (1IV_3)^{h}$
$ab1$	7	4	15	$3\varphi IV$	1	$a=8,\ b=1'$	$1\ (\varphi4)\ (1IV_3)^{h}$
$ab1$	7	4	16	$3\varphi IV$	1	$a=8,\ b=8'$	$1\ (\varphi4)\ (1IV_3)^{h'}$
$\frac{a}{a'}11$	7	4	17	$3\varphi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'}$	$3\varphi2\ (1IV_3)^{g}_{1'8'}$
$\frac{a'}{a}b1$	7	4	18	$3\varphi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'},\ b=8$	$3\varphi'1\ (1IV_3)^{h}_{1'8'}$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	19	$3\varphi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8}{8'}$	$1\ (\varphi3)\ (1IV_3)^{\nu}_{88'}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	20	$3\varphi IV$	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8}{8'},\ a=1'$	$1\ (\varphi5)\ (1IV_3)^{h}_{88'}$
$ab1$	7	4	21	$3\varphi IV'$	1	$a=2',\ b=1'$	$2\varphi4\ (1IV'_3)^{h}$
$ab1$	7	4	22	$3\varphi IV'$	1	$a=2',\ b=2$	$2\varphi3\ (1IV'_3)^{h}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$ab1$	7	4	23	3φIV′	1	$a=1', b=2'$	$1(\varphi2)(1IV'_3)^h$
$ab1$	7	4	24	3φIV′	1	$a=1', b=2$	$1(\varphi1)(1IV'_3)^h$
$ab1$	7	4	25	3φIV′	1	$a=2, b=1'$	$1(\varphi4)(1IV'_3)^h$
$ab1$	7	4	26	3φIV′	1	$a=2, b=2'$	$1(\varphi4)(1IV'_3)^{h'}$
$\frac{a}{a'}11$	7	4	27	3φIV′	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$	$3\varphi2(1IV'_3)^s_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}b1$	7	4	28	3φIV′	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}, b=2$	$3\varphi'1(1IV'_3)^h_{1'2'}$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	29	3φIV′	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{2'}$	$1(\varphi3)(1IV'_3)^v_{22'}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	30	3φIV′	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{2'}, a=1'$	$1(\varphi5)(1IV'_3)^h_{22'}$
$ab1$	8	8	1	5χIV	17′	$a=1'7, b=2'8$	$14(\chi1)(1\pi IV)^h$
$ab1$	8	8	2	5χIV	17′	$a=1'7, b=28'$	$14(\chi1)(1\pi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	3	5χIV	17′	$a=2'8, b=1'7$	$3(\chi4)(1\pi IV)^h$
$ab1$	8	8	4	5χIV	17′	$a=28', b=1'7$	$3(\chi4)(1\pi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	5	5χIV	17′	$a=2'8, b=28'$	$2(\chi5)(1\pi IV)^h$
$ab1$	8	8	6	5χIV	17′	$a=28', b=2'8$	$2(\chi5)(1\pi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	7	5χIV	17	$a=1'7', b=2'8'$	$2(\chi4)(2IV)^h$
$ab1$	8	8	8	5χIV	17	$a=1'7', b=28$	$2(\chi1)(2IV)^h$
$ab1$	8	8	9	5χIV	17	$a=2'8', b=1'7'$	$4\chi3(2IV)^h$
$ab1$	8	8	10	5χIV	17	$a=2'8', b=28$	$4\chi2(2IV)^h$
$ab1$	8	8	11	5χIV	17	$a=28, b=1'7'$	$2(\chi5)(2IV)^h$
$ab1$	8	8	12	5χIV	17	$a=28, b=2'8'$	$2(\chi6)(2IV)^h$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	13	5χIV	17	$\frac{a}{a'}=\frac{1'7'}{2'8'}$	$5\chi1(2IV)^s_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	14	5χIV	17	$a=\frac{1'7'}{2'8'}, b=28$	$4\chi2(2IV)^h_{1'2'}$
$ab1$	8	8	15	5χIV	12′	$a=1'2, b=78'$	$3(\chi2)(3IV)^h$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$ab1$	8	8	16	$5\chi IV$	$12'$	$a=1'2,\ b=7'8$	$2\,(\chi 2)\,(3IV)^{h}$
$ab1$	8	8	17	$5\chi IV$	$12'$	$a=78',\ b=1'2$	$3\,(\chi 4)\,(3IV)^{h}$
$ab1$	8	8	18	$5\chi IV$	$12'$	$a=78',\ b=7'8$	$3\,(\chi 4)\,(3IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	19	$5\chi IV$	$12'$	$a=7'8,\ b=1'2$	$14\,(\chi 2)\,(3IV)^{h}$
$ab1$	8	8	20	$5\chi IV$	$12'$	$a=7'8,\ b=78'$	$3\,(\chi 4)\,(3IV)^{h''}$
$1\frac{b}{b'}1$	8	8	21	$5\chi IV$	$12'$	$\frac{b}{b'}=\frac{7'8}{78'}$	$3\,(\chi 3)\,(3IV)^{s}_{77'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	22	$5\chi IV$	$12'$	$\frac{b'}{b}=\frac{7'8}{78'},\ a=1'2$	$4\,(\chi 2)\,(3IV)^{h}_{77'}$
$ab1$	8	8	23	$5\chi IV$	$18'$	$a=1'8,\ b=2'7$	$3\,(\chi 2)\,(3IV')^{h}$
$ab1$	8	8	24	$5\chi IV$	$18'$	$a=1'8,\ b=27'$	$2\,(\chi 2)\,(3IV')^{h}$
$ab1$	8	8	25	$5\chi IV$	$18'$	$a=2'7,\ b=1'8$	$3\,(\chi 4)\,(3IV')^{h}$
$ab1$	8	8	26	$5\chi IV$	$18'$	$a=2'7,\ b=27'$	$3\,(\chi 4)\,(3IV')^{h'}$
$ab1$	8	8	27	$5\chi IV$	$18'$	$a=27',\ b=1'8$	$14\,(\chi 2)\,(3IV')^{h}$
$ab1$	8	8	28	$5\chi IV$	$18'$	$a=27',\ b=2'7$	$3\,(\chi 4)\,(3IV')^{h''}$
$1\frac{b}{b'}1$	8	8	29	$5\chi IV$	$18'$	$\frac{b}{b'}=\frac{27'}{2'7}$	$3\,(\chi 3)\,(3IV')^{s}_{22'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	30	$5\chi IV$	$18'$	$\frac{b'}{b}=\frac{27'}{2'7},\ a=1'8$	$4\,(\chi 2)\,(3IV')^{h}_{22'}$
$ab1$	8	8	31	$5\chi IV$	$11'$	$a=77',\ b=22'$	$14\,(\chi 1)\,(1\chi IV)^{h}$
$ab1$	8	8	32	$5\chi IV$	$11'$	$a=77',\ b=88'$	$14\,(\chi 1)\,(1\chi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	33	$5\chi IV$	$11'$	$a=22',\ b=77'$	$3\,(\chi 2)\,(1\chi IV)^{h}$
$ab1$	8	8	34	$5\chi IV$	$11'$	$a=88',\ b=77'$	$3\,(\chi 2)\,(1\chi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	35	$5\chi IV$	$11'$	$a=22',\ b=88'$	$2\,(\chi 2)\,(1\chi IV)^{h}$
$ab1$	8	8	36	$5\chi IV$	$11'$	$a=88',\ b=22'$	$2\,(\chi 2)\,(1\chi IV)^{h'}$
$1\frac{b}{b'}1$	8	8	37	$5\chi IV$	$11'$	$\frac{b}{b'}=\frac{22'}{77'}$	$2\,(\chi 1)\,(1\chi IV)^{v}_{27}$
$1\frac{b}{b'}1$	8	8	38	$5\chi IV$	$11'$	$\frac{b}{b'}=\frac{88'}{77'}$	$2\,(\chi 1)\,(1\chi IV)^{v}_{78}$

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	39	$5\chi IV$	$11'$	$\frac{b}{b'}=\frac{22'}{77'},\ a=88'$	$3(\chi 2)(1\chi IV)^{h}_{27}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	40	$5\chi IV$	$11'$	$\frac{b}{b'}=\frac{88'}{77'},\ a=22'$	$3(\chi 2)(1\chi IV)^{h}_{78}$
$ab1$	8	8	41	$5\chi IV$	18	$a=2'7',\ b=27$	$3(\chi 2)(1\chi' IV)^{h}$
$ab1$	8	8	42	$5\chi IV$	18	$a=2'7',\ b=1'8'$	$2(\chi 4)(1\chi' IV)^{h}$
$ab1$	8	8	43	$5\chi IV$	18	$a=27,\ b=2'7'$	$14(\chi 1)(1\chi' IV)^{h}$
$ab1$	8	8	44	$5\chi IV$	18	$a=27,\ b=1'8'$	$14(\chi 1)(1\chi' IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	45	$5\chi IV$	18	$a=1'8',\ b=2'7'$	$2(\chi 3)(1\chi' IV)^{h}$
$ab1$	8	8	46	$5\chi IV$	18	$a=1'8',\ b=27$	$3(\chi 1)(1\chi' IV)^{h}$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	47	$5\chi IV$	18	$\frac{a}{a'}=\frac{2'7'}{1'8'}$	$4(\chi 1)(1\chi' IV)^{s}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	48	$5\chi IV$	18	$\frac{a}{a'}=\frac{2'7'}{1'8'},\ b=27$	$5(\chi 1)(1\chi' IV)^{h}_{1'2'}$
$1\frac{b}{b'}1$	8	8	49	$5\chi IV$	18	$\frac{b}{b'}=\frac{27}{2'7'}$	$2(\chi 2)(1\chi' IV)^{\nu}_{22'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	50	$5\chi IV$	18	$\frac{b}{b'}=\frac{27}{2'7'},\ a=1'8'$	$4(\chi 1)(1\chi' IV)^{h}_{22'}$
$ab1$	8	8	51	$5\chi IV$	12	$a=7'8',\ b=78$	$3(\chi 2)(1\chi' IV')^{h}$
$ab1$	8	8	52	$5\chi IV$	12	$a=7'8',\ b=1'2'$	$2(\chi 4)(1\chi' IV')^{h}$
$ab1$	8	8	53	$5\chi IV$	12	$a=78,\ b=7'8'$	$14(\chi 1)(1\chi' IV')^{h}$
$ab1$	8	8	54	$5\chi IV$	12	$a=78,\ b=1'2'$	$14(\chi 1)(1\chi' IV')^{h'}$
$ab1$	8	8	55	$5\chi IV$	12	$a=1'2',\ b=7'8'$	$2(\chi 3)(1\chi' IV')^{h}$
$ab1$	8	8	56	$5\chi IV$	12	$a=1'2',\ b=78$	$3(\chi 1)(1\chi' IV')^{h}$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	57	$5\chi IV$	12	$\frac{a}{a'}=\frac{1'2'}{7'8'}$	$4(\chi 1)(1\chi' IV')^{s}_{1'7'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	58	$5\chi IV$	12	$\frac{a}{a'}=\frac{1'2'}{7'8'},\ b=78$	$5(\chi 1)(1\chi' IV')^{h}_{1'7'}$
$1\frac{b}{b'}1$	8	8	59	$5\chi IV$	12	$\frac{b}{b'}=\frac{78}{7'8'}$	$2(\chi 2)(1\chi' IV')^{\nu}_{77'}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	60	$5\chi IV$	12	$\frac{b}{b'}=\frac{78}{7'8'},\ a=1'2'$	$4(\chi 1)(1\chi' IV')^{h}_{7'7'}$
V. Гексагональная сингония							
$\frac{a}{a'}11$	20	12	1	$14aIV$	159	$\frac{a}{a'}=\frac{2'6'10'}{3'7'11'}$	$14a1\,(12IV)^{s}_{2'3'}$
$\frac{a}{a'}11$	20	12	2	$15aIV$	159	$\frac{a}{a'}=\frac{4'8'12'}{3'7'11'}$	$15a1\,(12IV)^{s}_{3'4'}$
$\frac{a}{a'}11$	24	12	1	$17\chi IV$	159	$\frac{a}{a'}=\frac{1'5'9'}{3'7'11'}$	$28(\chi 1)(12IV)^{s}_{1'3'}$
$\frac{a}{a'}11$	25	12	1	$18IV$	159	$\frac{a}{a'}=\frac{2'6'10'}{4'8'12'}$	$(33)(12IV)^{s}_{2'4'}$
$\frac{a}{a'}11$	26	12	1	$14\pi IV$	159	$\frac{a}{a'}=\frac{2'6'10'}{1'5'9'}$	$14\pi 1\,(12IV)^{s}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}11$	26	12	2	$15\pi IV$	159	$\frac{a}{a'}=\frac{4'8'12'}{1'5'9'}$	$15\pi 1\,(12IV)^{s}_{1'4'}$
$\frac{a}{a'}11$	27	24	1	$18\chi IV$	1256910	$\frac{a}{a'}=\frac{1'2'5'6'9'10'}{3'4'7'8'11'12'}$	$33(\chi 2)(12\varphi' IV)^{s}_{1'3'}$
$\frac{a}{a'}11$	27	24	2	$18\chi IV$	1458912	$\frac{a}{a'}=\frac{1'4'5'8'9'12'}{2'3'6'7'10'11'}$	$33(\chi 1)(12\varphi IV)^{s}_{1'2'}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
Системы тетрапараллелоэдров VI порядка							
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	17	6	1	12φIV	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{5}{9}$	12φ′1 (1IV)
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	19	6	1	15IV	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{5}{9}$	14 (1IV)
$\frac{a}{a'}11$	19	6	2	15IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{12'}$	$(26)\,(1IV)^{s}_{r}$
$\frac{a}{a'}11$	19	6	3	15IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{12'}{4'}$	$(27)\,(1IV)^{s}_{l}$
$\frac{a}{a'}11$	19	6	4	14IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{6'}{2'}$	$(12)\,(1IV)^{s}_{r}$
$\frac{a}{a'}11$	19	6	5	14IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'}$	$(13)\,(1IV)^{s}_{l}$
$\frac{a}{a'}11$	21	6	1	17IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{11}{3}$	$(31)\,(1IV)^{s}_{r}$
$\frac{a}{a'}11$	21	6	2	17IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{11}$	$(32)\,(1IV)^{s}_{l}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	23	6	1	12πIV	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{5}{9}$	12π (1IV)
$\frac{a}{a'}11$	25	12	1	14IV	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{3\ 4'}{1112'}$	$(36)\,(3IV)^{s}_{r}$
$\frac{a}{a'}11$	25	12	2	14IV	12′	$\frac{a}{a'}=\frac{1112'}{3\ 4'}$	$(37)\,(3IV)^{s}_{l}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}11$	25	12	3	15IV	18′	$\frac{a}{a'}=\frac{3\ 10'}{6'11}$	$(36)(3IV')^{s}_{r}$
$\frac{a}{a'}11$	25	12	4	15IV	18′	$\frac{a}{a'}=\frac{6'11}{3\ 10'}$	$(37)(3IV')^{s}_{l}$
$a\frac{b}{b'}\frac{b'}{b}$	26	12	1	15*a*IV	18′	$a=1'8,\ \frac{b}{b'}=\frac{5\ 6'}{9\ 10'}$	14π1 (3IV′)
Системы тетрапараллелоэдров VIII порядка							
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	1	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{8'},\ b=2$	$3(\chi4)(1IV)^{h}_{2'8'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	2	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{8'},\ b=8$	$3(\chi4)(1IV)^{h'}_{2'8'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	3	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{7'},\ b=2$	$14(\chi1)(1IV)^{h}_{1'7'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	4	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{7'},\ b=8$	$14(\chi1)(1IV)^{h'}_{1'7'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	5	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{7'},\ b=7$	$3(\chi4)(1IV)^{h}_{2'7'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	6	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{8'}{7'},\ b=7$	$3(\chi4)(1IV)^{h}_{7'8'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	7	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{7'},\ b=7'$	$2(\chi5)(1IV)^{h}_{2'7'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	8	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{8'}{7'},\ b=7'$	$2(\chi5)(1IV)^{h}_{7'8'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	9	5χIV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'},\ b=7$	$3(\chi2)(1IV)^{h}_{1'2'}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	10	$5\chi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'},\ b=7$	$3(\chi 2)(1IV)^{h}_{1'8'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	11	$5\chi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'},\ b=8$	$2(\chi 2)(1IV)^{h}_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	12	$5\chi IV$	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'},\ b=2$	$2(\chi 2)(1IV)^{h}_{1'8'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	13	$5\chi IV$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{2'}{7}$	$2(\chi 4)(1IV)^{h}_{2'7}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	14	$5\chi IV$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{8'}{7}$	$2(\chi 4)(1IV)^{h}_{78'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	15	$5\chi IV$	1	$a=2,\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{8'}$	$2(\chi 5)(1IV)^{h}_{78'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	16	$5\chi IV$	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{2'}$	$2(\chi 5)(1IV)^{h}_{2'7}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	17	$5\chi IV$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{2}{7'}$	$14(\chi 1)(1IV)^{h}_{27'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	18	$5\chi IV$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{8}{7'}$	$14(\chi 1)(1IV)^{h}_{7'8}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	19	$5\chi IV$	1	$a=2,\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{8}$	$14(\chi 2)(1IV)^{h}_{7'8}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	20	$5\chi IV$	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{2}$	$14(\chi 2)(1IV)^{h}_{27'}$

Т а б л и ц а 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа		Символ системы
					явная симметрия	симметрия связи	
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	21	$5\chi IV$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{2'}{7'}$	$14\,(\chi 1)\,(1IV)^{h}_{2'7'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	22	$5\chi IV$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{8'}{7'}$	$14\,(\chi 1)\,(1IV)^{h}_{7'8'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	23	$5\chi IV$	1	$a=2',\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{8'}$	$2\,(\chi 6)\,(1IV)^{h}_{7'8'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	24	$5\chi IV$	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{7'}{2'}$	$2\,(\chi 6)\,(1IV)^{h}_{2'7'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	25	$5\chi IV$	1	$a=2,\ \frac{b}{b'}=\frac{8}{8'}$	$14\,(\chi 2)\,(1IV)^{h}_{88'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	26	$5\chi IV$	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{2}{2'}$	$14\,(\chi 2)\,(1IV)^{h}_{22'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	27	$5\chi IV$	1	$a=2',\ \frac{b}{b'}=\frac{8}{8'}$	$2\,(\chi 5)\,(1IV)^{h}_{88'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	28	$5\chi IV$	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{2}{2'}$	$2\,(\chi 5)\,(1IV)^{h}_{22'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	29	$5\chi IV$	1	$a=2,\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'}$	$2\,(\chi 5)\,(1IV)^{h}_{77'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	30	$5\chi IV$	1	$a=8,\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'}$	$2\,(\chi 5)\,(1IV)^{h'}_{77'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	31	$5\chi IV$	1	$a=2',\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'}$	$3\,(\chi 3)\,(1IV)^{h}_{77'}$

Таблица 6 (*продолжение*)

Производная форма	Вид симметрии	Величина симметрии	№	Тип I порядка	Характеристические числа: явная симметрия	Характеристические числа: симметрия связи	Символ системы
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	32	$5\chi IV$	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'}$	$3(\chi 3)(1IV)^{h'}_{77'}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	33	$5\chi IV$	1	$a=1',\ \frac{b}{b'}=\frac{2}{7}$	$2(\chi 1)(1IV)^{h}_{27}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	34	$5\chi IV$	1	$a=1'.\ \frac{b}{b'}=\frac{8}{7}$	$2(\chi 1)(1IV)^{h}_{78}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	35	$5\chi IV$	1	$a=2',\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{8}$	$3(\chi 3)(1IV)^{h}_{78}$
$a\frac{b}{b'}1$	8	8	36	$5\chi IV$	1	$a=8',\ \frac{b}{b'}=\frac{7}{2}$	$3(\chi 3)(1IV)^{h}_{27}$
Системы тетрапараллелоэдров XII порядка							
$\frac{a}{a'}11$	25	12	1	18IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{4'}$	$(36)(1IV)^{s}_{r}$
$\frac{a}{a'}11$	25	12	2	18IV	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{2'}$	$(37)(1IV)^{s}_{l}$

Табли

Уравнения правильных точечных систем в пространстве (графы: 1 —

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
I. Триклинная				
1. Гемининакоидальный вид				
1	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$C_1^1 - P1$		Нет
2. Пинакоидальный вид сим				
1π	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$C_i^1 - P\bar{1}$		Нет
2			—	
II. Моноклин				
3. Гемипризматический-аксиальный (сфе				
2	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$C_2^1 - P2$		Нет
3	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$	$C_2^3 - C2$		
4. Гемипризматический безаксиальный				
1χ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$C_s^1 - Pm$	1χ1	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$
1χ′	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$	$C_s^3 - Cm$	1χ′1	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$
5. Ромбопризматический вид				
2χ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$C_{2h}^1 - P2/m$	2χ1	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$
3χ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$	$C_{2h}^3 - C2/m$	3χ1	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$
6			4	
III. Ромбиче				
6. Сфеноэдрический вид сим				
4	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$D_2^1 - P222$	Нет	
5	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	$D_2^6 - C222$		
6	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	$D_2^8 - I222$		
7	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda_0}{2},\ +G\frac{\lambda_1}{2}$	$D_2^7 - F222$		

ца 7
символ системы, 2 — уравнения систем, 3 — современные обозначения)

Системы					
морфные	асимморфные				Количество
3	1	2	3		
сингония					
симметрии ($y=b$, $z=c$, $\nu=d$)					1
		Нет			
метрии ($y=n^{\pi}b$, $z=n^{\pi}c$, $\nu=n^{\pi}d$)					1
		Нет			
		—			2
ная сингония					
ноидичный) вид симметрии ($y=b$, $z=n^{v}c$, $v=n^{v}d$)					3
	(1)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\lambda_0$, $+\lambda_1$			
(доматический) вид симметрии ($y=n^{\chi}b$, $z=c$, $v=d$)					4
$C_s^2 - Pc$		Нет			
$C_s^4 - Cc$					
симметрии ($y=n^{\chi}b$, $z=n^{v}c$, $V=n^{v}d$)					6
$C_{2h}^4 - P2/c$	1 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\lambda_0$, $+\lambda_1$	$C_{2h}^2 - P2_1/m$		
$C_{2h}^6 - C2/c$	1 (χ2)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\chi\frac{\lambda_0}{2}$, $+\lambda_1$	$C_{2h}^5 - P2_1/c$		
		3			13
ская сингония					
метрии ($y=n^{h}b$, $z=n^{v}c$, $v=n^{v+h}d$)					9
	(2)	$+\lambda$, $+h\frac{\lambda_0}{2}$, $+h\frac{\lambda_1}{2}$	$D_2^5 - C222_1$		
	(3)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\lambda_0$, $+\lambda_1$	$D_2^2 - P222_1$		
	(4)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+F\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_1}{2}$	$D_2^3 - P2_12_12$		
	(5)	$+(F+v)\frac{\lambda}{2}$, $+F\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_1}{2}$	$D_2^9 - I2_12_12_1$		
	(14)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+(h+v)\frac{\lambda_0}{2}$, $+v\frac{\lambda_1}{2}$	$D_2^4 - P2_12_12_1$		

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
				7. Ромбопирамидальный вид сим
2φ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$C_{2v}^{1} - Pmm2$	$2\varphi1$	$+\varphi\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$
			$2\varphi2$	$+\lambda,\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$
			$2\varphi3$	$+\varphi\frac{\lambda}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$
			$2\varphi4$	$+\varphi\frac{\lambda}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_1}{2}$
			$2\varphi5$	$+\lambda,\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_1}{2}$
$2\varphi'$	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	$C_{2v}^{11} - Cmm2$	$2\varphi'1$	$+\varphi\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$
3φ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$	$C_{2v}^{14} - Amm2$	$3\varphi1$	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+\varphi)\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$
			$3\varphi2$	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_1}{2}$
$3\varphi'$	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	$C_{2v}^{20} - Imm2$	$3\varphi'1$	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+\varphi)\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$
			$3\varphi'2$	$+(F+\varphi)\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$
$3\varphi''$	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda_0}{2},\ +G\frac{\lambda_1}{2}$	$C_{2v}^{18} - Fmm2$	$3\varphi'1$	$+(2F+\varphi)\frac{\lambda}{4},\ +(2F+2G+\varphi)\frac{\lambda_0}{4},\ +(2G+\varphi)\frac{\lambda_1}{4}$
				8. Ромбопирамидальный вид сим
4χ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	$D_{2h}^{1} - Pmmm$	$4\chi1$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$
			$4\chi2$	$+\lambda,\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$
			$4\chi3$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$
5χ	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	$D_{2h}^{19} - Cmmm$	$5\chi1$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
метрии ($y=b$, $z=n^{v}c$, $v=n^{v+\varphi}d$)				22
C_{2v}^{3} — $Pcc2$	1(φ1)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\lambda_0$, $+\lambda_1$	C_{2v}^{2} — $Pmc2_1$	
C_{2v}^{4} — $Pma2$	1(φ2)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\lambda_0$, $+\varphi\frac{\lambda_1}{2}$	C_{2v}^{7} — $Pmn2_1$	
C_{2v}^{6} — $Pnc2$	1(φ3)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\varphi\frac{\lambda_0}{2}$, $+\lambda_1$	C_{2v}^{5} — $Pca2_1$	
C_{2v}^{10} — $Pnn2$	1(φ4)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+\varphi\frac{\lambda_0}{2}$, $+\varphi\frac{\lambda_1}{2}$	C_{2v}^{9} — $Pna2_1$	
C_{2v}^{8} — $Pba2$	1(φ5)	$+v\frac{\lambda}{2}$, $+F\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_1}{2}$	C_{2v}^{12} — $Cmc2_1$	
C_{2v}^{17} — $Aba2$				
C_{2v}^{13} — $Ccc2$				
C_{2v}^{15} — $Abm2$				
C_{2v}^{16} — $Ama2$				
C_{2v}^{22} — $Ima2$				
C_{2v}^{21} — $Iba2$				
C_{2v}^{19} — $Fdd2$				
метрии ($y=n^{h+\chi}b$, $z=n^{v}c$, $v=n^{v+h}d$)				28
D_{2h}^{3} — $Pccm$	2 (χ1)	$+\lambda$, $+h\frac{\lambda_0}{2}$, $+h\frac{\lambda_0}{2}$	D_{2h}^{9} — $Pbam$	
D_{2h}^{4} — $Pban$	2 (χ2)	$+\lambda$, $+h\frac{\lambda_0}{2}$, $+(h+\chi)\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{13} — $Pmmn$	
D_{2h}^{2} — $Pnnn$	2 (χ3)	$+\lambda$, $+(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$, $+(h+\chi)\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{12} — $Pnnm$	
D_{2h}^{20} — $Cccm$	2 (χ4)	$+\chi\frac{\lambda}{2}$, $+h\frac{\lambda_0}{2}$, $+h\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{11} — $Pbcm$	

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
			$5\chi2$	$+\lambda$, $+(F+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_1}{2}$
			$5\chi3$	$+\chi\frac{\lambda}{2}$, $+(F+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_1}{2}$
6χ	$+F\frac{\lambda}{2}$, $+F\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{25} — *Immm*	$6\chi1$	$+(F+\chi)\frac{\lambda}{2}$, $+F\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_1}{2}$
7χ	$+F\frac{\lambda}{2}$, $+(F+G)\frac{\lambda_0}{2}$, $+G\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{23} — *Fmmm*	$7\chi1$	$+(2F+\chi)\frac{\lambda}{4}$, $+(2F+2G+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$, $+(2G+\chi)\frac{\lambda_1}{4}$
	13			20

IV. Тетрагональ

9. Тетрагонально-пирамидальный вид

8	$+\lambda$, $+\lambda_0$, $+\lambda_0$	$C_4^1 - P4$		Нет
9	$+F\frac{\lambda}{2}$, $+F\frac{\lambda_0}{2}$, $+F\frac{\lambda_0}{2}$	$C_4^5 - I4$		

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
D_{2h}^{21} — *Cmma*	2 (χ5)	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{14} — *Pbcn*	
D_{2h}^{22} — *Ccca*	2 (χ6)	$+v\frac{\lambda}{2},\ (h+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{10} — *Pccn*	
D_{2h}^{26} — *Ibam*	3 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_1$	D_{2h}^{5} — *Pmma*	
D_{2h}^{24} — *Fddd*	3 (χ2)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{7} — *Pmna*	
	3 (χ3)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\lambda_1$	D_{2h}^{8} — *Pcca*	
	3 (χ4)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{6} — *Pnna*	
	4 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{17} — *Cmcm*	
	4 (χ2)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +(F+\chi)\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{18} — *Cmca*	
	5 (χ1)	$+(F+v)\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{28} — *Imma*	
	5 (χ2)	$+(F+v)\frac{\lambda}{2},\ +(F+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{27} — *Ibca*	
	14 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +(h+v)\frac{\lambda_0}{2},\ +v\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{16} — *Pnma*	
	14 (χ2)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +(h+v)\frac{\lambda_0}{2},\ +(v+\chi)\frac{\lambda_1}{2}$	D_{2h}^{15} — *Pbca*	28
	26			59

ная сингония

симметрии $(y=b,\ y_0=b_v^4,\ y_1=b_{v+1}^4)$ **6**

	(6)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	C_4^2 — $P4_1$	
	(15)	$-v\frac{\lambda}{4},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	C_4^4 — $P4_3$	
	(16)	$+v\frac{\lambda}{4},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	C_4^3 — $P4_2$	
	(17)	$(2F+v)\frac{\lambda}{4},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	C_4^6 — $I4_1$	

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
		10. Дитетрагонально-пирамидальный вид		
8φ	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$	$C_{4v}^1 - P4mm$	8φ1	$+\varphi\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$
			8φ2	$+\lambda, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$
9φ	$+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	$C_{4v}^9 - I4mm$	8φ3	$+\varphi\frac{\lambda}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$
			9φ1	$+(F+\varphi)\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$
		11. Тетрагонально-сфеноэдрический вид		
2π	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	$S_4^1 - P\bar{4}$		Нет
3π	$+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda^0}{2}$	$S_4^2 - I\bar{4}$		
		12. Тетрагонально-бипирамидальный вид		
8χ	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	$C_{4h}^1 - P4/m$	8χ1	$+\lambda, +\chi\frac{\lambda_0}{2}, +\chi\frac{\lambda_0}{2}$
9χ	$+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	$C_{4h}^5 - I4/m$		
		13. Тетрагонально-трапецоэдрический вид		
10	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	$D_4^1 - P422$		Нет
11	$+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	$D_4^9 - I422$		

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
симметрии ($y=b$, $y_0=b^4_v$, $y_1=b^4_{v+n\varphi}$)				12
C^5_{4v} — $P4cc$	6 (φ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	C^7_{4v} — $P4_2mc$	
C^2_{4v} — $P4bm$	6 (φ2)	$+(v+\varphi)\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	C^3_{4v} — $P4_2cm$	
C^6_{4v} — $P4nc$	6 (φ3)	$+(v+\varphi)\frac{\lambda}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$	C^4_{4v} — $P4_2nm$	
C^{10}_{4v} — $I4cm$	6 (φ4)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2},\ +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$	C^8_{4v} — $P4_2bc$	
	17 (φ1)	$+(2F+v)\frac{\lambda}{4},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +(F+\varphi)\frac{\lambda_0}{2}$	C^{11}_{4v} — $I4_1md$	
	17 (φ2)	$+(2F+2\varphi+v)\frac{\lambda}{4},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +(F+\varphi)\frac{\lambda_0}{2}$	C^{12}_{4v} — $I4_1cd$	
симметрии ($y=n^\pi b$, $y_0=b^4_\pi$, $y_1=b^4_{\pi+1}$)				2
		Нет		
симметрии ($y=n^\chi b$, $y_0=b^4_v$, $y_1=b^4_{v+1}$)				6
C^3_{4h} — $P4/n$	6 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	C^2_{4h} — $P4_2/m$	
	6 (χ2)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2}$	C^4_{4h} — $P4_2/n$	
	17 (χ1)	$+(2F+v)\frac{\lambda}{4},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +(F+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$	C^6_{4h} — $I4_1/a$	
симметрии ($y=n^h b$, $y_0=b^4_v$, $y_1=b^4_{v+nh}$)				10
	(7)	$+\lambda,\ +h\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2}$	D^2_4 — $P42_12$	
	(8)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	D^5_4 — $P4_222$	
	(18)	$+(h+v)\frac{\lambda}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2}$	D^6_4 — $P4_22_12$	
	(19), (20)	$\pm v\frac{\lambda}{4},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	D^3_4 — $P4_122$ D^7_4 — $P4_322$	
	(21)	$+(2F+v)\frac{\lambda}{4},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	D^{10}_4 — $I4_122$	
	(23), (24)	$\pm v\frac{\lambda}{4},\ +h\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2}$	D^4_4 — $P4_12_12$ D^8_4 — $P4_32_12$	

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
14. Тетрагонально-скаленоэдрический вид				
4δ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	D^1_{2d} — $P\bar{4}2m$	$4\delta 1$	$+\delta\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$
5δ	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	D^5_{2d} — $P\bar{4}m2$	$5\delta 1$	$+\delta\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$
			$5\delta 2$	$+\lambda,\ +(F+\delta)\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$
			$5\delta 3$	$+\delta\frac{\lambda}{2},\ +(F+\delta)\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$
6δ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	D^{11}_{2d} — $I\bar{4}2m$		
7δ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda_0}{2},\ +G\frac{\lambda_0}{2}$	D^9_{2d} — $I\bar{4}m2$	$7\delta 1$	$+(F+\delta)\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda_0}{2},\ +G\frac{\lambda_0}{2}$
15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид				
10χ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	D^1_{4h} — $P4/mmm$	$10\chi 1$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$
			$10\chi 2$	$+\lambda,\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2}$
11χ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	D^{17}_{4h} — $I4/mmm$	$10\chi 3$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2}$
			$11\chi 1$	$+(F+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
симметрии ($y = n^{\pi}b,\ y_0 = b^4_{\pi},\ y_1 = b^4_{\pi+n^{\delta}}$)				12
$D^2_{2d} - P\bar{4}2c$	2 (δ1)	$+\lambda,\ +\delta\frac{\lambda_0}{2},\ +\delta\frac{\lambda_0}{2}$	$D^3_{2d} - P\bar{4}2_1m$	
$D^6_{2d} - P\bar{4}c2$	2 (δ2)	$+\delta\frac{\lambda}{2},\ +\delta\frac{\lambda_0}{2},\ +\delta\frac{\lambda_0}{2}$	$D^4_{2d} - P\bar{4}2_1c$	
$D^7_{2d} - P\bar{4}b2$	5 (δ1)	$+\delta\frac{\lambda}{4},\ +\lambda_0,\ +\delta\frac{\lambda_0}{2}$	$D^{12}_{2d} - I\bar{4}2d$	
$D^8_{2d} - P\bar{4}n2$				
$D^{10}_{2d} - I\bar{4}c2$				
симметрии ($y = n^{n+\chi}b,\ y_0 = b^4_{v},\ y_1 = b^4_{v+n^{h}}$)				20
$D^2_{4h} - P4/mcc$	7 (χ1)	$+\lambda,\ +h\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2}$	$D^5_{4h} - P4/mbm$	
$D^3_{4h} - P4/nbm$	7 (χ2)	$+\lambda,\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$	$D^7_{4h} - P4/nmm$	
$D^4_{4h} - P4/nnc$	7 (χ3)	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2}$	$D^6_{4h} - P4/mnc$	
$D^{18}_{4h} - I4/mcm$	7 (χ4)	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$	$D^8_{4h} - P4/ncc$	
	8 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D^9_{4h} - P4_2/mmc$	
	8 (χ2)	$+(v+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D^{10}_{4h} - P4_2/mcm$	
	8 (χ3)	$+(v+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2}$	$D^{12}_{4h} - P4_2/nnm$	
	8 (χ4)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2},\ +\chi\frac{\lambda_0}{2}$	$D^{11}_{4h} - P4_2/nbc$	
	18 (χ1)	$+(v+h)\frac{\lambda}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2}$	$D^{14}_{4h} - P4_2/mnm$	
	18 (χ2)	$+(v+h)\frac{\lambda}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$	$D^{16}_{4h} - P4_2/ncm$	
	18 (χ3)	$+(v+h+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2},\ +h\frac{\lambda_0}{2}$	$D^{13}_{4h} - P4_2/mbc$	

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
16			14	

V. Гексагональ

	16. Тригонально-пирамидальный вид			
12	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C_3^1 - P3$		Нет
13	$+F\frac{\lambda}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$	$C_3^4 - R3$		
	17. Дитригонально-пирамидальный вид			
12φ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C_{3v}^1 - P3m1$	12φ1	$+\varphi\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$
12φ′	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$	$C_{3v}^2 - P31m$	12φ′1	$+\varphi\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$
13φ	$+F\frac{\lambda}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$	$C_{3v}^5 - R3m$	13φ1	$+F\frac{\lambda}{3},\ +\varphi\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$
	18. Ромбоэдрический вид сим			
12a	$+\lambda,\ +\frac{\lambda_0}{2},\ +\frac{\lambda_0}{2}$	$C_{3i}^1 - P\bar{3}$		Нет
13a	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	$C_{3i}^2 - R\bar{3}$		
	19. Тригонально-трапецоэдрический вид			
14	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$	$D_3^2 - P321$		Нет
15	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D_3^1 - P312$		
16	$+F\frac{\lambda}{3},\ (F+G)\frac{\lambda_0}{3},\ +G\frac{\lambda_0}{3}$	$D_3^7 - R32$		

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
	18 (χ4)	$+(v+h+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$	D_{4h}^{15} — $P4_2/nmc$	
	21 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{4},\ (F+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	D_{4h}^{20} — $I4_1/acd$	
	21 (χ2)	$+(2\chi+v)\frac{\lambda}{4},\ +(F+\chi)\frac{\lambda_0}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{2}$	D_{4h}^{19} — $I4_1/amd$	
	38			68
ная сингония				
симметрии ($y=b,\ y_0=b_v^3,\ y_1=b_{v+1}^3$)				4
	(10), (11)	$\pm\frac{\lambda}{3},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	C_3^2 — $P3_1$ C_3^3 — $P3_2$	
симметрии ($y=b,\ y_0=b_v^3,\ y_1=b_{v+n\varphi}^3$)				6
C_{3v}^3 — $P3c1$ C_{3v}^4 — $P31c$ C_{3v}^6 — $R3c$		Нет		
метрии ($y=n^ab,\ y_0=n^ab_v^3,\ y_1=n^ab_{v+1}^3$)				2
		Нет		
симметрии ($y=n^hb,\ y_0=b_v^3,\ y_1=b_{v+n^h}^3$)				7
	(12), (13)	$\pm v\frac{\lambda}{3},\ F\frac{\lambda_0}{3},\ F\frac{\lambda_0}{3}$	D_3^4 — $P3_121$ D_3^6 — $P3_221$	
	(26), (27)	$\pm v\frac{\lambda}{3},\ \lambda_0,\ \lambda_0$	D_3^3 — $P3_112$ D_3^5 — $P3_212$	

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
20. Гексагонально-скаленоэдрический вид				
14*a*	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$	$D_{3d}^3 — P\bar{3}m1$	14*a*1	$+\alpha\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$
15*a*	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D_{3d}^1 — P\bar{3}1m$	15*a*1	$+\alpha\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$
16*a*	$+F\frac{\lambda}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$	$D_{3d}^5 — R\bar{3}m$	16*a*1	$+F\frac{\lambda}{3},\ +\alpha\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$
21. Гексагонально-пирамидальный вид				
17	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C_6^1 — P6$		Нет
22. Дигексагонально-пирамидальный вид				
17φ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C_{6v}^1 — P6mm$	17φ1	$+\varphi\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$
23. Тригонально-бипирамидальный вид				
12π	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C_{3h}^1 — P\bar{6}$		Нет
24. Гексагонально-бипирамидальный вид				
17χ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C_{6h}^1 — P6/m$		Нет
25. Гексагонально-трапецоэдрический вид				
18	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D_6^1 — P622$		Нет
26. Дитригонально-бипирамидальный вид				
14π	$+\lambda,\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$	$D_{3h}^3 — P\bar{6}2m$	14π1	$+\pi\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda_0}{3},\ +F\frac{\lambda_0}{3}$
15π	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D_{3h}^1 — P\bar{6}m2$	15π1	$+\pi\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
симметрии $(y = n^{a+h}b,\ y_0 = n^a b^3_v,\ y_1 = n^a b^3_{v+nh})$				6
$D^4_{3d} - P\bar{3}c1$		Нет		
$D^2_{3d} - P\bar{3}1c$				
$D^6_{3d} - R\bar{3}c$				
симметрии $(y = b,\ y_0 = b^6_v,\ y_1 = b^6_{v+1})$				6
	(28)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C^6_6 - P6_3$	
	(29), (30)	$\pm v\frac{\lambda}{3},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$\{C^4_6 - P6_2$, $C^5_6 - P6_4\}$	
	(31), (32)	$\pm v\frac{\lambda}{6},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$\{C^2_6 - P6_1$, $C^3_6 - P6_5\}$	
симметрии $(y = b,\ y_0 = b^6_\varphi,\ y_1 = b^6_{v+n\varphi})$				4
$C^2_{6v} - P6cc$	28 (φ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ \lambda_0$	$C^4_{6v} - P6_3mc$	
	28 (φ2)	$+(v+\varphi)\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C^3_{6v} - P6_3cm$	
симметрии $(y = n^\pi b,\ y_0 = b^6_\pi,\ y_1 = b^6_{\pi+1})$				1
		Нет		
симметрии $(y = n^\chi b,\ y_0 = b^6_v,\ y_1 = b^6_{v+1})$				2
	28 (χ1)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$C^3_{6h} - P6_3/m$	
симметрии $(y = n^h b,\ y_0 = b^6_v,\ y_1 = b^6_{v+nh})$				6
	(33)	$+v\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D^6_6 - P6_322$	
	(34), (35)	$\pm v\frac{\lambda}{3},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$\{D^4_6 - P6_222$, $D^5_6 - P6_422\}$	
	(36), (37)	$\pm v\frac{\lambda}{6},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$\{D^2_6 - P6_122$, $D^3_6 - P6_522\}$	
симметрии $(y = n^{\pi+h}b,\ y_0 = b^6_\pi,\ y_1 = b^6_{\pi+nh})$				4
$D^4_{3h} - P\bar{6}2c$		Нет		
$D^2_{3h} - P\bar{6}c2$				

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
27. Дигексагонально-бипирамидальный вид				
18χ	$+\lambda,\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$	$D_{6h}^1 - P6/mmm$	$18\chi 1$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +\lambda_0,\ +\lambda_0$
21			10	
VI. Кубическая				
28. Тетартоэдрический вид симмет				
19	$+\lambda,\ +\lambda,\ +\lambda$	$T^1 - P23$		Нет
20	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2}$	$T^3 - I23$		
21	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\lambda}{2}$	$T^2 - F23$		
29. Додэкаэдрический вид симмет				
19χ	$+\lambda,\ +\lambda,\ +\lambda$	$T_h^1 - Pm3$	$19\chi 1$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda}{2}$
20χ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2}$	$T_h^5 - Im3$		
21χ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\lambda}{2}$	$T_h^3 - Fm3$	$21\chi 1$	$+(F+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\chi}{2}$
30. Тетраэдрический вид симмет				
19δ	$+\lambda,\ +\lambda,\ +\lambda$	$T_d^1 - P\bar{4}3m$	$19\delta 1$	$+\delta\frac{\lambda}{2},\ +\delta\frac{\lambda}{2},\ +\delta\frac{\lambda}{2}$
20δ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2}$	$T_d^3 - I\bar{4}3m$		
21δ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\lambda}{2}$	$T_d^2 - F\bar{4}3m$	$21\delta 1$	$+(F+\delta)\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\lambda}{2}$

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
симметрии ($y = n^{h+\chi}b$, $y_0 = b^6_v$, $y_1 = b^6_{v+n^h}$)				4
$D^2_{6h} - P6/mcc$	33(χ1)	$+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	$D^3_{6h} - P6_3/mcm$	
	33(χ2)	$+(v+\chi)\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	$D^4_{6h} - P6_3/mmc$	
		21		52
сингония				
рии ($x_0 = n^h a^3_0$, $x_1 = n^v a^3_{0+1}$, $x_2 = n^{v+h} a^3_{0+2}$)				5
	(22)	$+(F+h+v)\frac{\lambda}{2}, +(F+h)\frac{\lambda}{2}, +(F+h)\frac{\lambda}{2}$	$T^5 - I2_13$	
	(22)	$+(h+v)\frac{\lambda}{2}, +h\frac{\lambda}{2}, +h\frac{\lambda}{2}$	$T^4 - P2_13$	
рии ($x_0 = n^{h+\chi} a^3_0$, $x_1 = n^v a^3_{0+1}$, $x_2 = n^{v+h} a^3_{0+2}$)				7
$T^2_h - Pn3$	22(χ1)	$+(F+h+v)\frac{\lambda}{2}, +(F+h+\chi)\frac{\lambda}{2} + +(F+v)\frac{\lambda}{2}$	$T^7_h - Ia3$	
$T^4_h - Fd3$	25(χ1)	$+(h+v)\frac{\lambda}{2}, +(h+\chi)\frac{\lambda}{2}, +v\frac{\lambda}{2}$	$T^6_h - Pa3$	
рии ($x_0 = n^h a^3_0$, $x_1 = n^v a^3_{0+n^\delta}$, $x_2 = n^{h+v} a^3_{0+2n^\delta}$)				6
$T^4_d - P\bar{4}3n$	22(δ1)	$+(F+h+v)\frac{\lambda}{2} + \delta\frac{\lambda}{4}$ $+(F+h)\frac{\lambda}{2} + \delta\frac{\lambda}{4}, +(F+v)\frac{\lambda}{2} + \delta\frac{\lambda}{4}$	$T^6_d - I\bar{4}3d$	
$T^5_d - F\bar{4}3c$				

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
			31. Гироэдрический вид симмет	
22	$+\lambda,\ +\lambda,\ +\lambda$	$O^1 — P432$	Нет	
23	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2}$	$O^5 — I432$		
24	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\lambda}{2}$	$O^3 — F432$		
			32. Октаэдрический вид симмет	
$\dot{2}2\chi$	$+\lambda,\ +\lambda,\ +\lambda$	$O_h^1 — Pm3m$	$22\chi1$	$+\chi\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda}{2},\ +\chi\frac{\lambda}{2}$
23χ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2},\ +F\frac{\lambda}{2}$	$O_h^9 — Im3m$		
24χ	$+F\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\lambda}{2}$	$O_h^5 — Fm3m$	$24\chi1$	$+(F+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +(F+G)\frac{\lambda}{2},\ +G\frac{\lambda}{2}$

Таблица 7 (*продолжение*)

Системы				Количество
морфные	асимморфные			
3	1	2	3	
рии $(x_0 = n^{h+d}a_0^3,\ x_1 = n^{v+d}a^3_{0+n^d},\ x_2 = n^{h+d+v}a^3_{0+2n^d})$				8
	9	$+d\frac{\lambda}{2},\ +d\frac{\lambda}{2},\ +d\frac{\lambda}{2}$	$O^2 - P4_232$	
	(38)	$+(2F-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2F+2G-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2G-d)\frac{\lambda}{4}$	$O^6 - P4_332$	
	(39)	$+(2F+2h-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2F-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2F+2v-d)\frac{\lambda}{4}$	$O^7 - P4_132$	
	(40)	$+(2v-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2v+2h-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2h-d)\frac{\lambda}{4}$	$O^8 - I4_132$	
	(41)	$+(2v+2h-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2h-d)\frac{\lambda}{4},\ +(2v-d)\frac{\lambda}{4}$	$O^4 - F4_132$	
рии $(x_0 = n^{h+d+\chi}a_0^3,\ x_1 = n^{v+d}a^3_{0+n^d},\ x_2 = n^{d+h+v}a^3_{0+2n^d})$				10
$O_h^2 - Pn3n$	9(χ1)	$+d\frac{\lambda}{2},\ +d\frac{\lambda}{2},\ +d\frac{\lambda}{2}$	$O_h^3 - Pm3n$	
	9(χ2)	$+(d+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +(d+\chi)\frac{\lambda}{2},\ +(d+\chi)\frac{\lambda}{2}$	$O_h^4 - Pn3m$	
$O_h^6 - Fm3c$	38(χ1)	$+(2F-d+\chi)\frac{\lambda}{4},\ +(2F+2G-d+\chi)\frac{\lambda}{4},\ +(2G-d+\chi)\frac{\lambda}{4}$	$O_h^{10} - Ia3d$	
	38(χ2)	$+(2F-d-\chi)\frac{\lambda}{4},\ +(2F+2G-d+\chi)\frac{\lambda}{4},\ +(2G-d+\chi)\frac{\lambda}{4}$	$O_h^7 - Fd3m$	

Системы				
симморфные			гемисим	
1	2	3	1	2
15			6	
73			54	

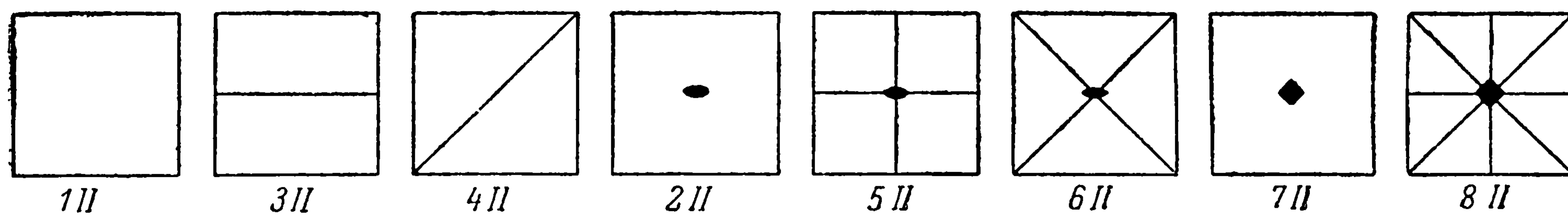
Таблица 7 (*продолжение*)

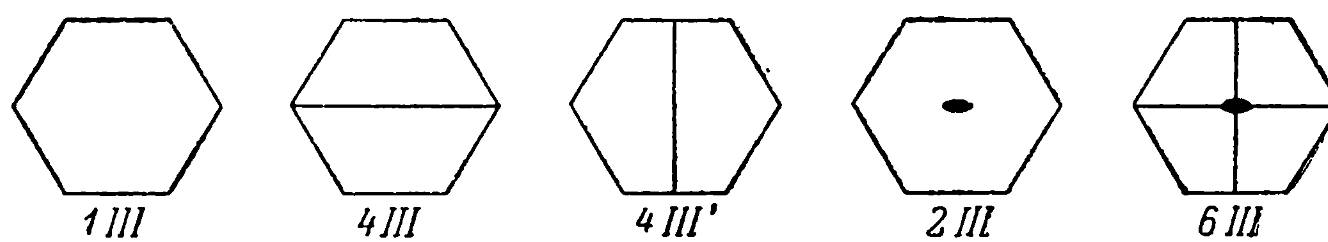
Системы					Количество
морфные		асимморфные			
	3	1	2	3	
	.	39 $(\chi 1)$	$+(2F+2h-d)\frac{\lambda}{4}$, $+(2F+2\chi-d)\frac{\lambda}{4}$, $+(2F+2v-d)\frac{\lambda}{4}$	$O_h^8 - Fd3c$	
		15			36
		103			230

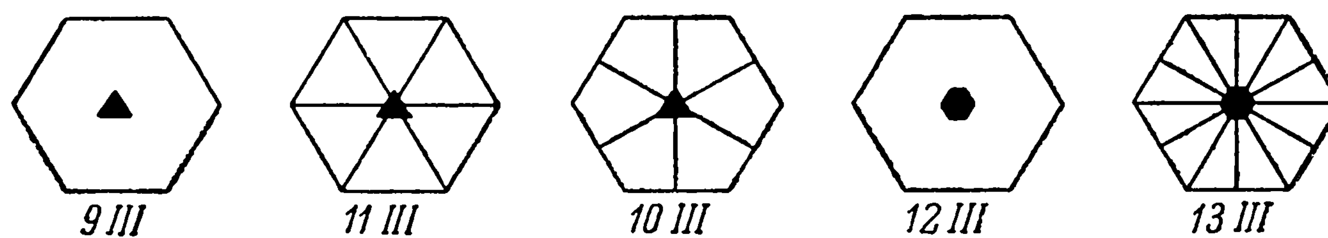
ПРИЛОЖЕНИЕ (таблицы I—XIII)

ТАБЛИЦА I

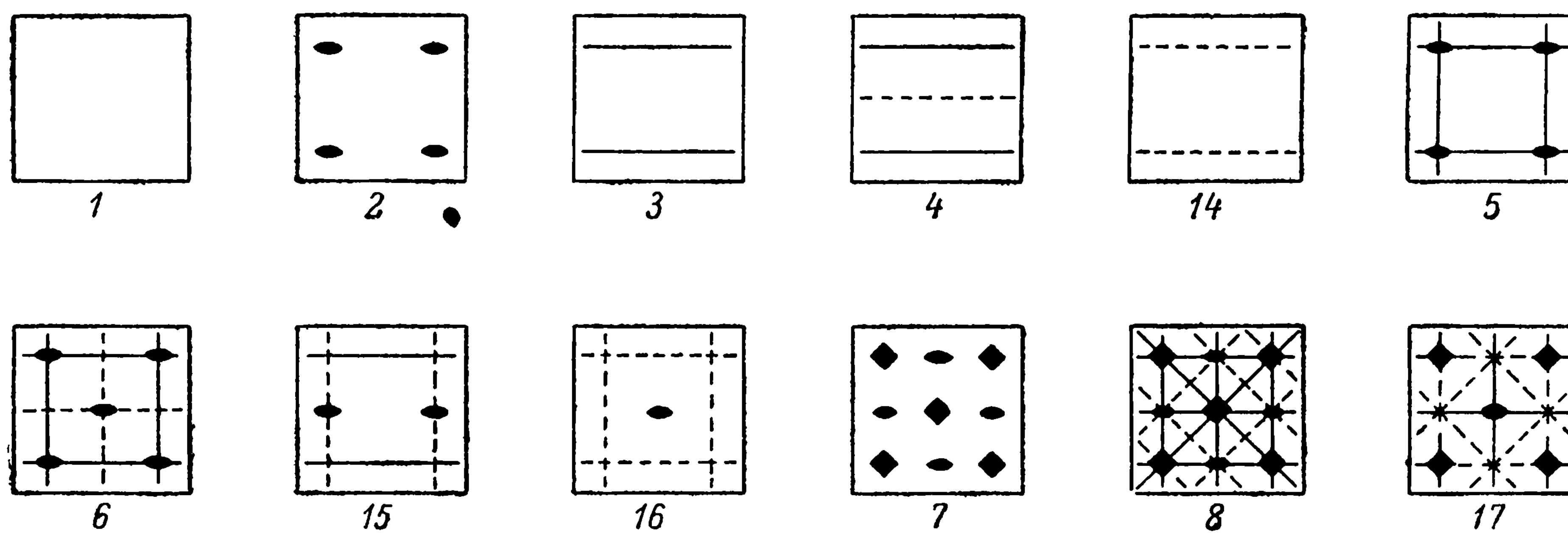
Параллелогоны I порядка







Правильные плоские точечные системы



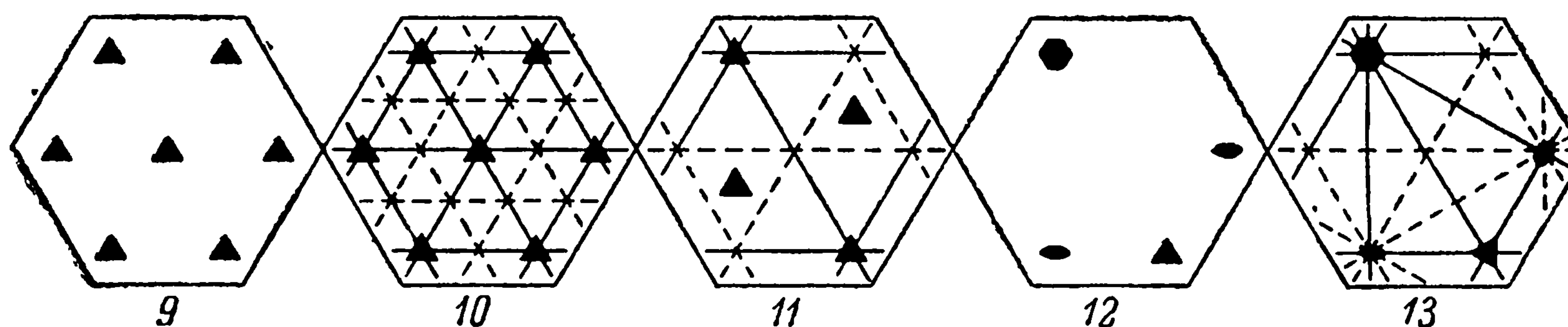
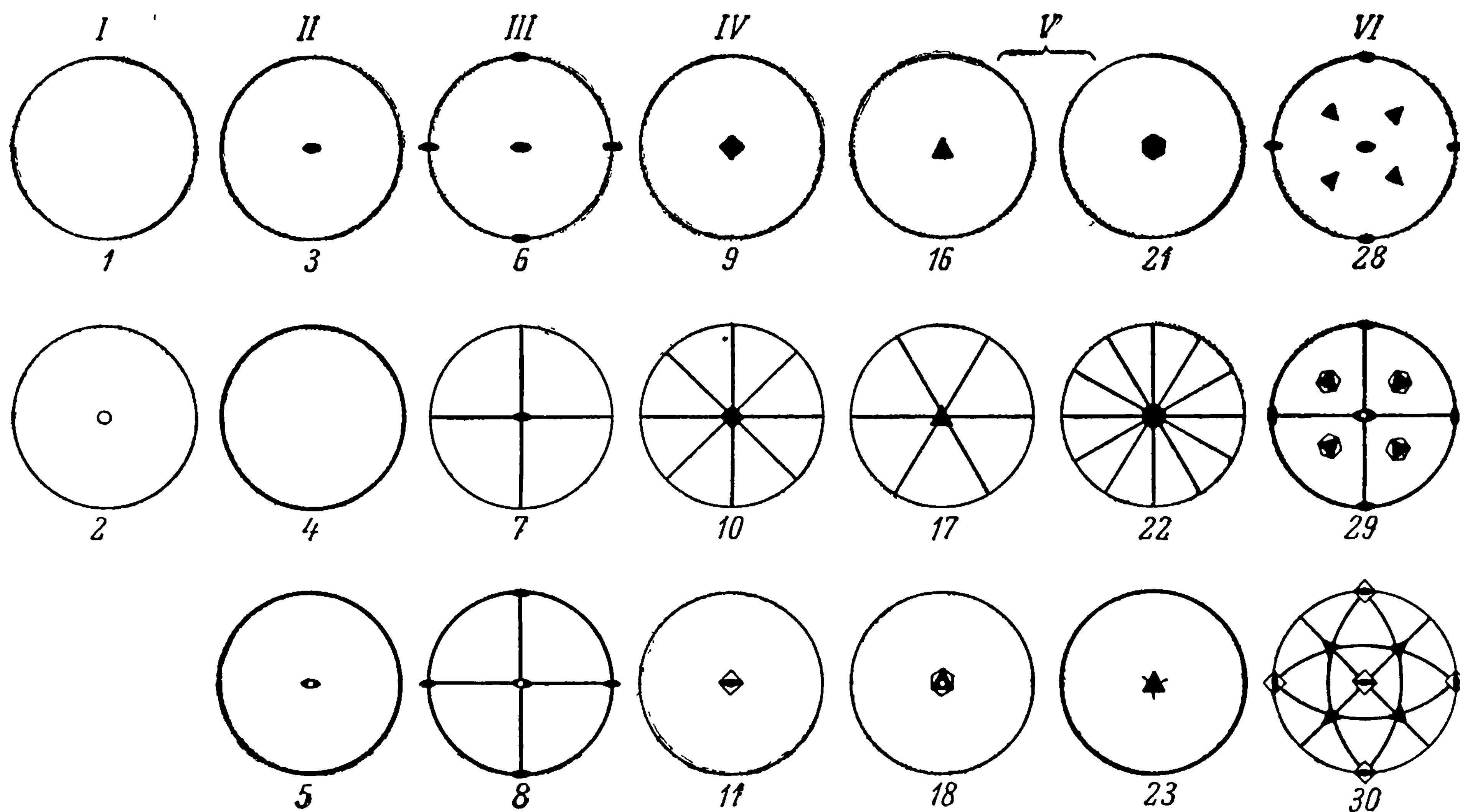


ТАБЛИЦА II



Виды симметрии
правильных делений пространства

I Триклинная сингония
II Моноклинная "
III Ромбическая "
IV Тетрагональная "
V Гексагональная "
VI Кубическая "

Обозначения:

- ● Ось симметрии 2-го порядка
- ○ Центр инверсии
- ▲ Ось симметрии 3-го порядка
- ◆ " " 4-го "
- ◈ Ось 4-го порядка сложной симметрии
- ⬢ Ось симметрии 6-го порядка
- Ось 6-го порядка I-го рода сложной симметрии
- Ось 6-го порядка II-го рода сложной симметрии

Жирные линии – плоскости симметрии

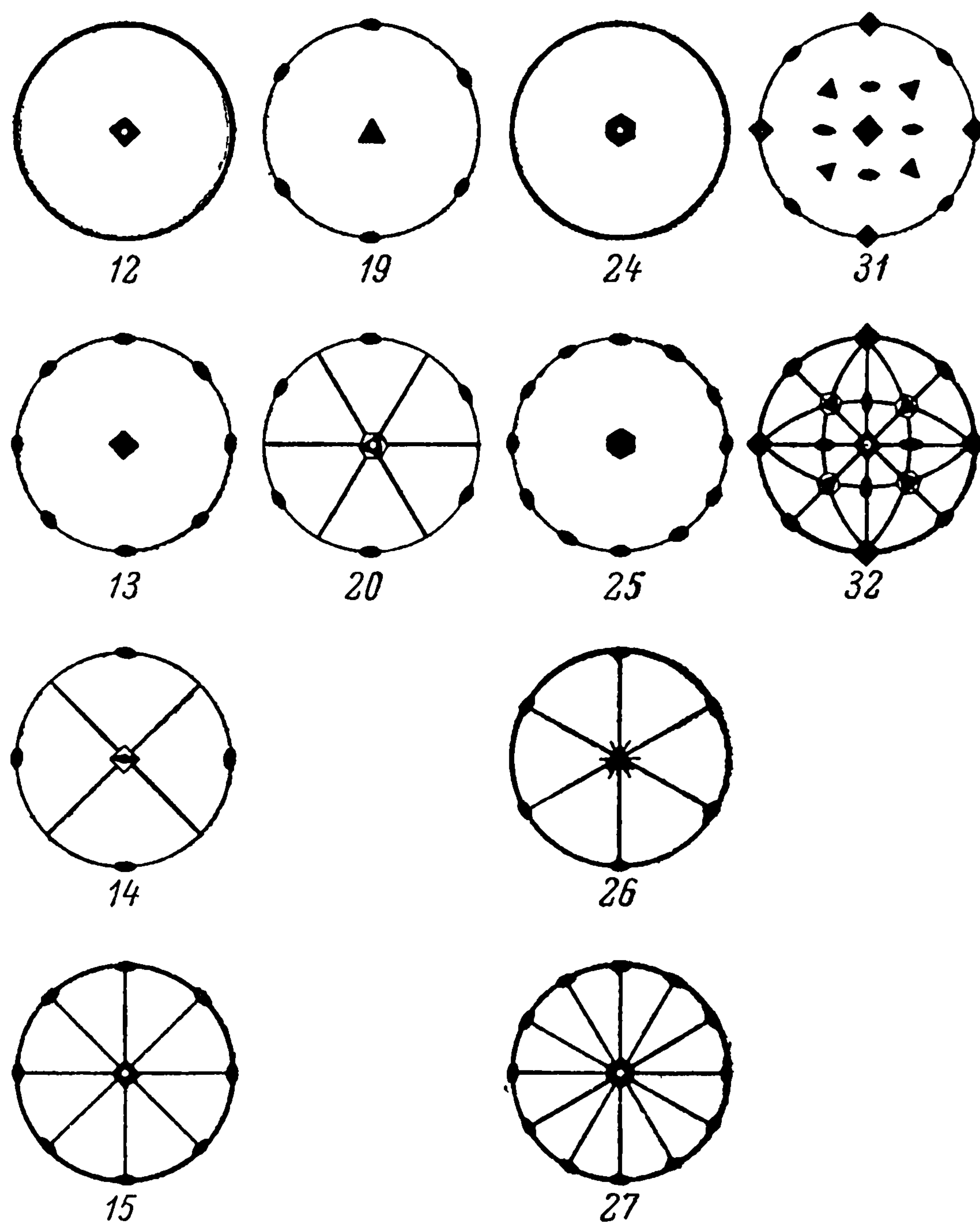


ТАБЛИЦА III

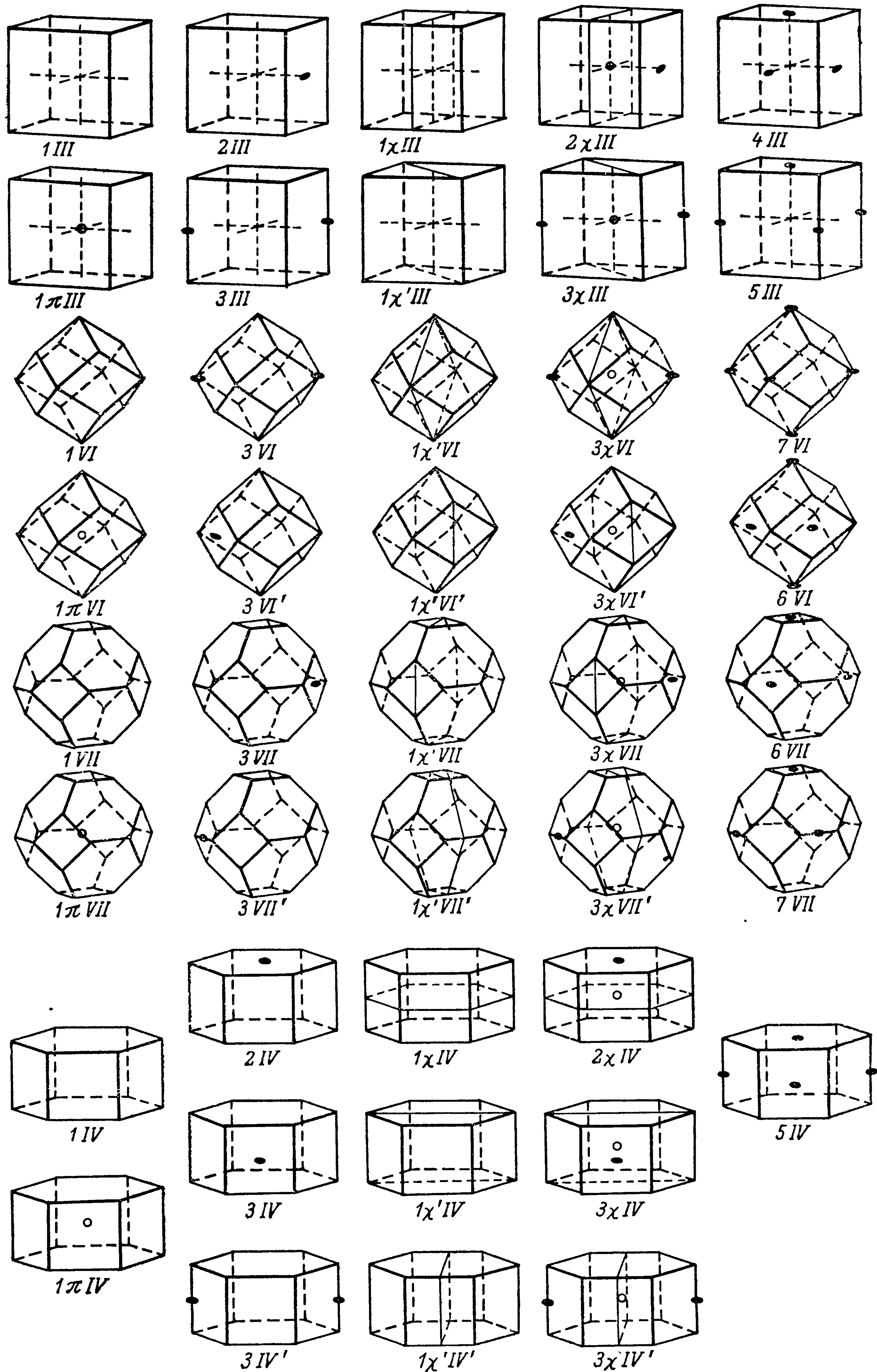

1 III
2 III
1χ III
2χ III
4 III
1π III
3 III
1χ' III
3χ III
5 III
1 VI
3 VI
1χ' VI
3χ VI
7 VI
1π VI
3 VI'
1χ' VI'
3χ VI'
6 VI
1 VII
3 VII
1χ' VII
3χ VII
6 VII
1π VII
3 VII'
1χ' VII'
3χ VII'
7 VII
2 IV
1χ IV
2χ IV
1 IV
5 IV
3 IV
1χ' IV
3χ IV
1π IV
3 IV'
1χ' IV'
3χ' IV'

ТАБЛИЦА III (*продолжение*)

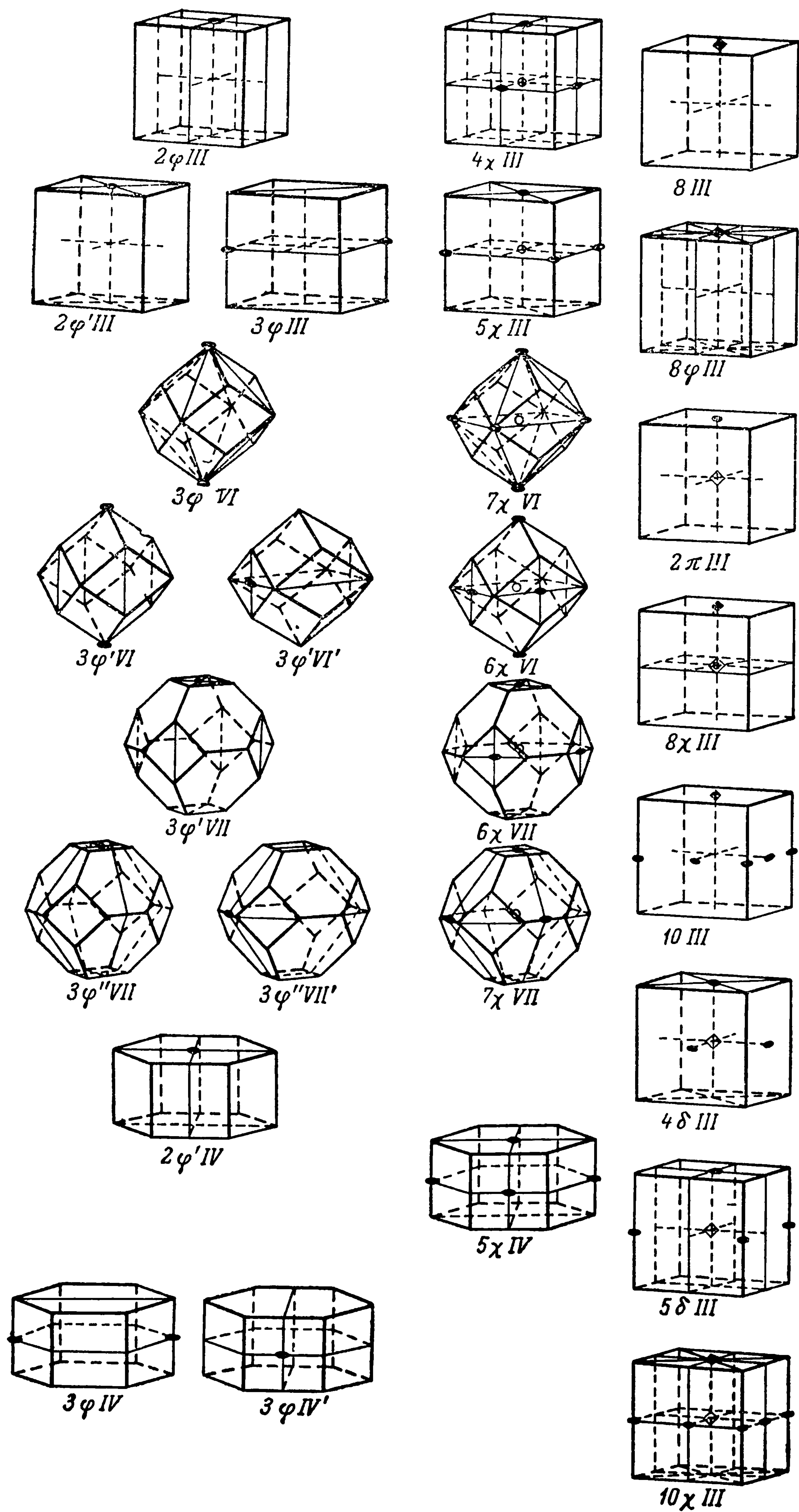
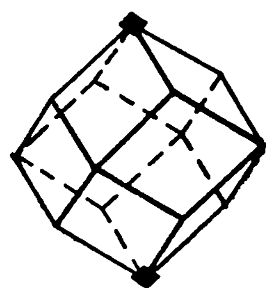
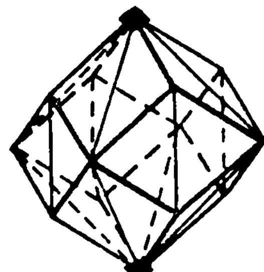
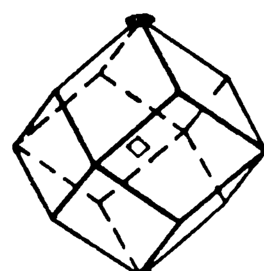
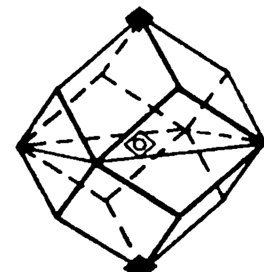


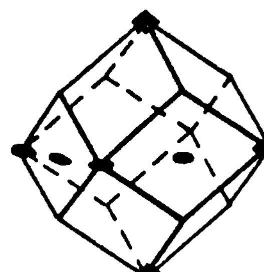
ТАБЛИЦА III (*продолжение*)

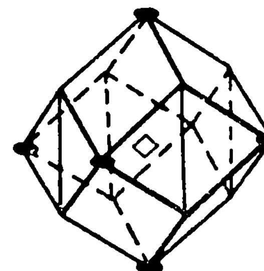

9 VI

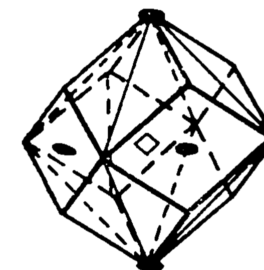

9 φ VI

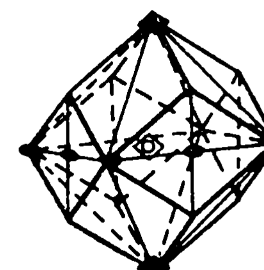

3 π VI

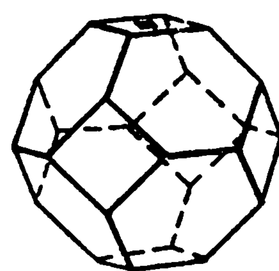

9 χ VI

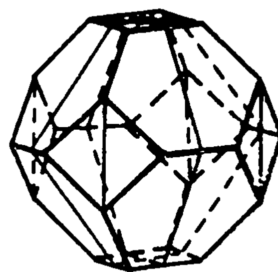

11 VI

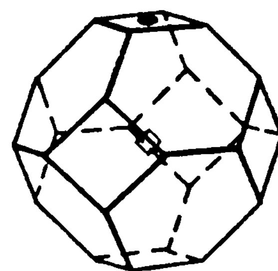

7 δ VI

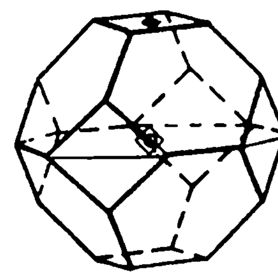

6 δ VI

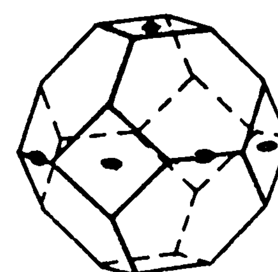

11 χ VI

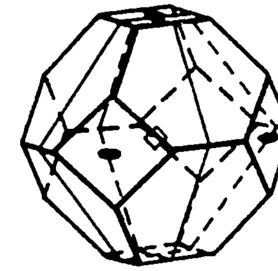

9 VII

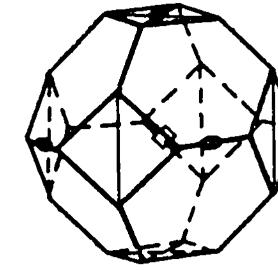

9 φ VII

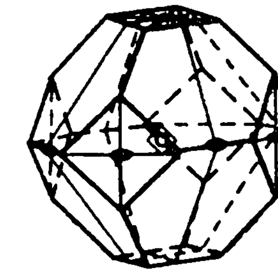

3 π VII

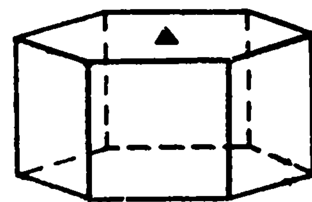

9 χ VII

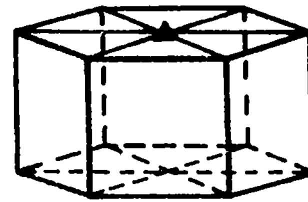

11 VII

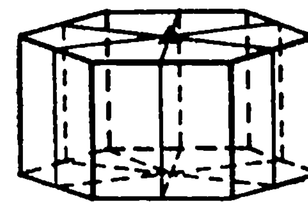

6 δ VII

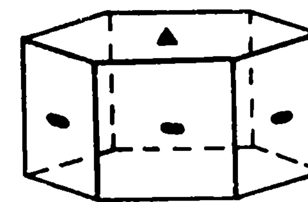

7 δ VII

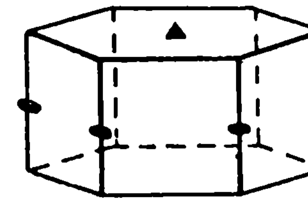

11 χ VII

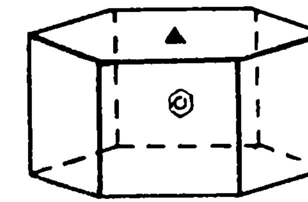

12 IV

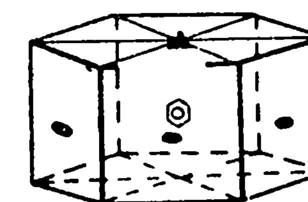

12 φ IV

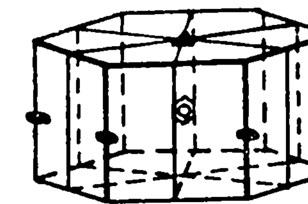

12 φ' IV

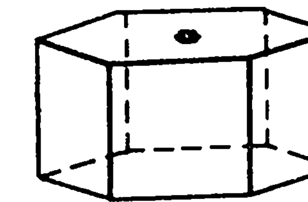

14 IV

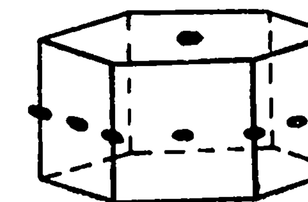

15 IV

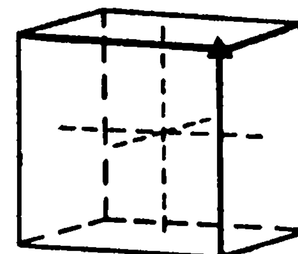

12 α IV

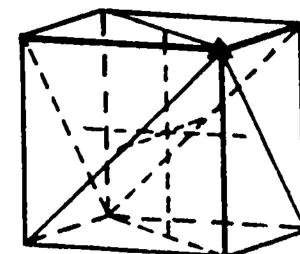

14 α IV

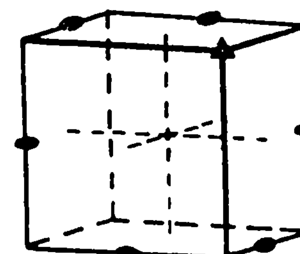

15 α IV

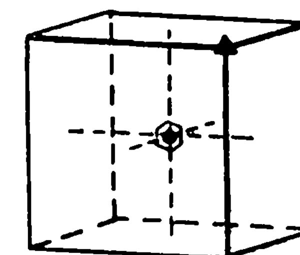

17 IV

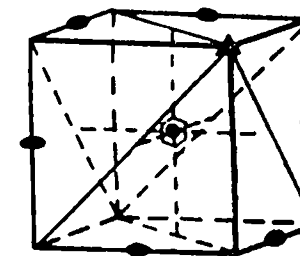

18 IV

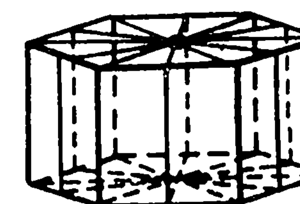

13 III

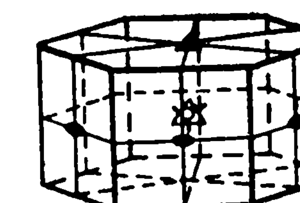

13 φ III

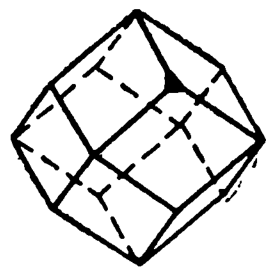

16 III

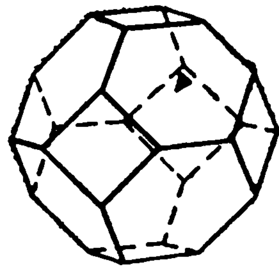

13 α III

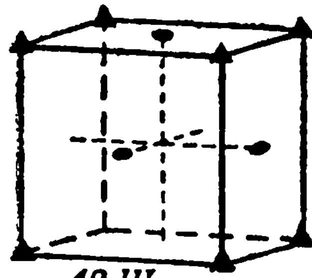

16 α III

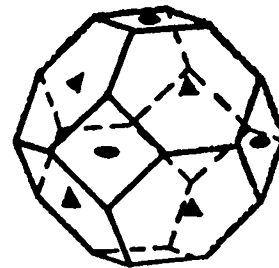

17 φ IV

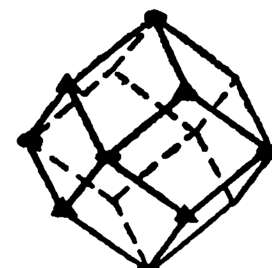

14 π IV

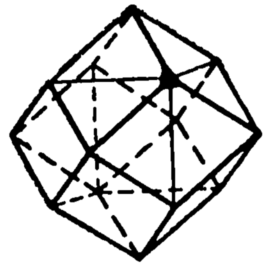

13 VI

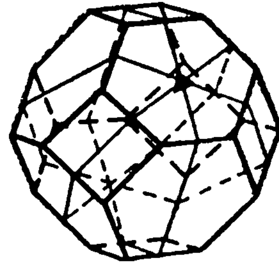

13 VII

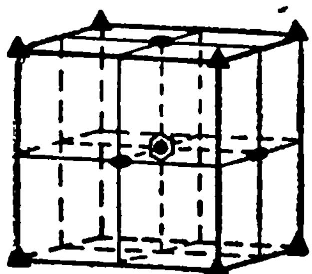

19 III

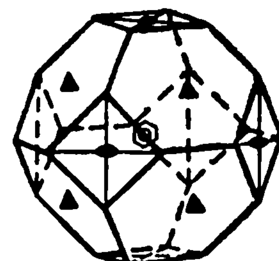

20 VII

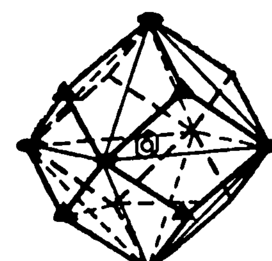

21 VI

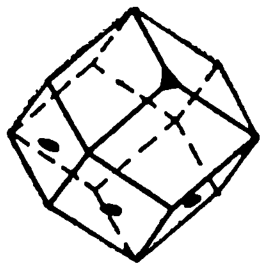

13 φ VI

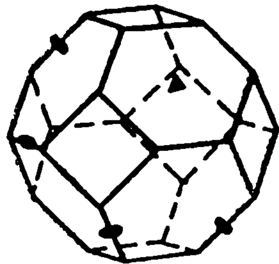

13 φ VII

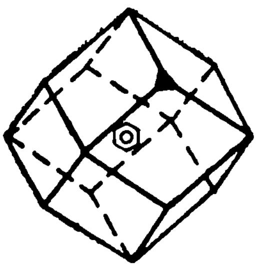

19 χ III

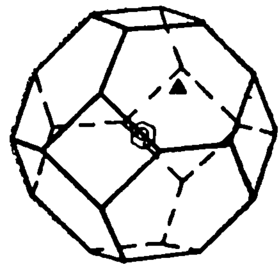

20 χ VII

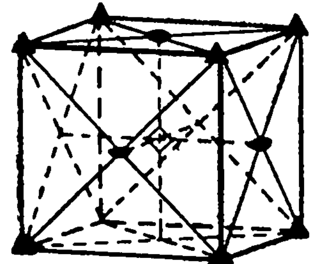

21 χ VI

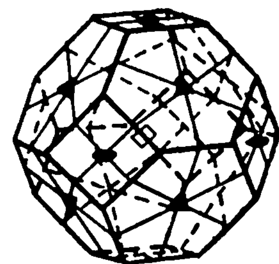

16 VI

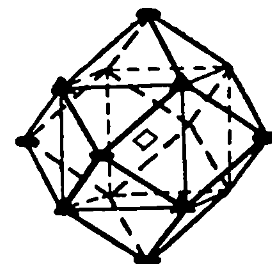

16 VII

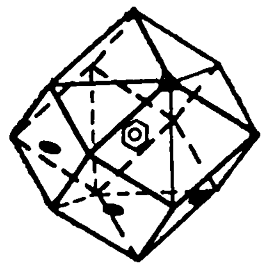

13 α VI

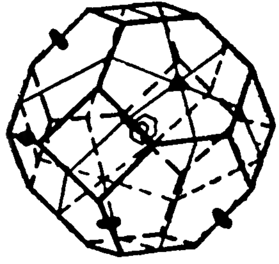

13 α VII

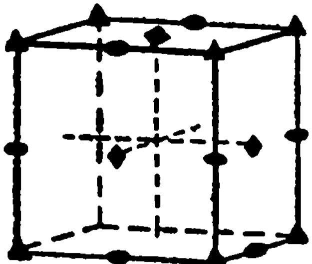

19 δ III

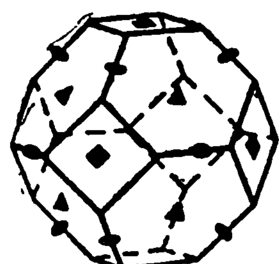

20 δ VII

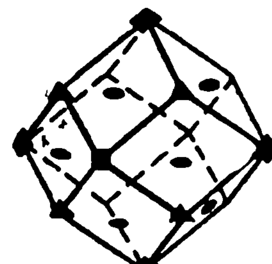

21 δ VI

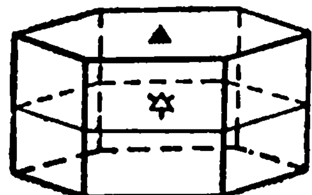

16 α VI

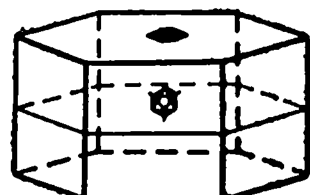

16 α VII

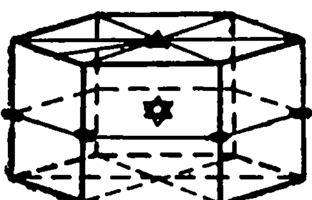

22 III

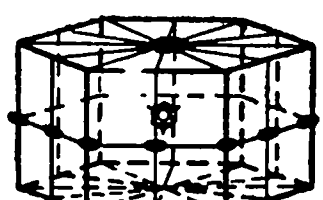

23 VII

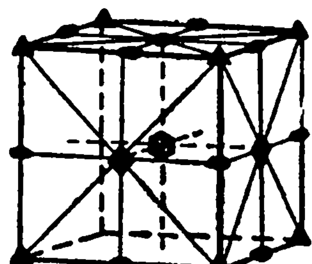

24 VI

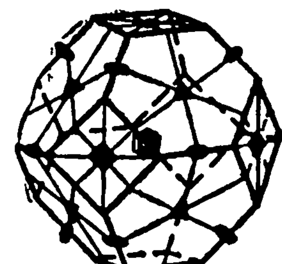

12 π IV

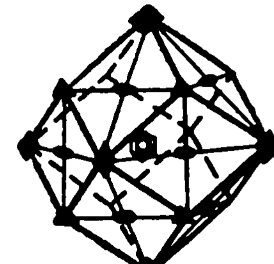

17 χ IV

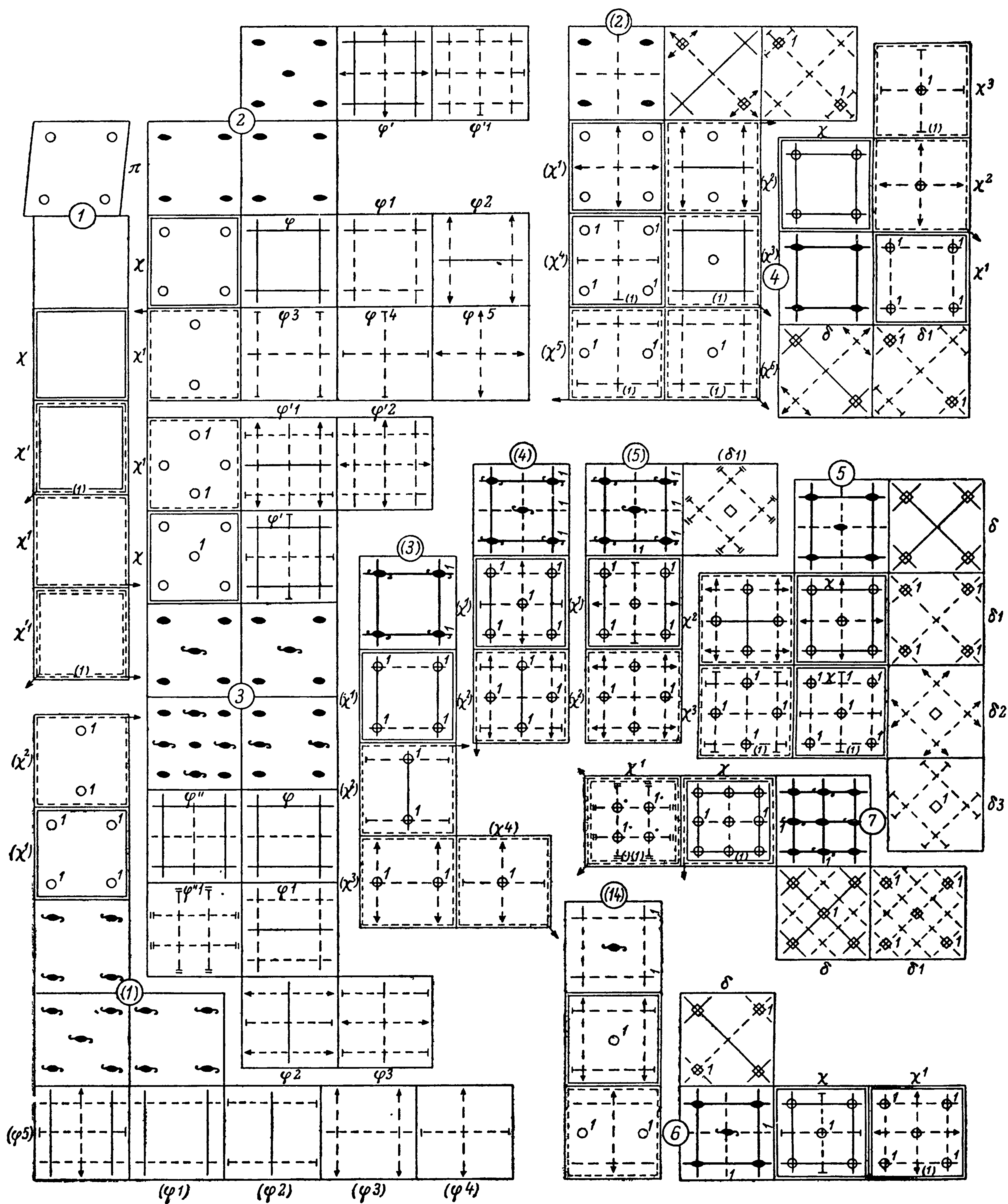

15 π IV

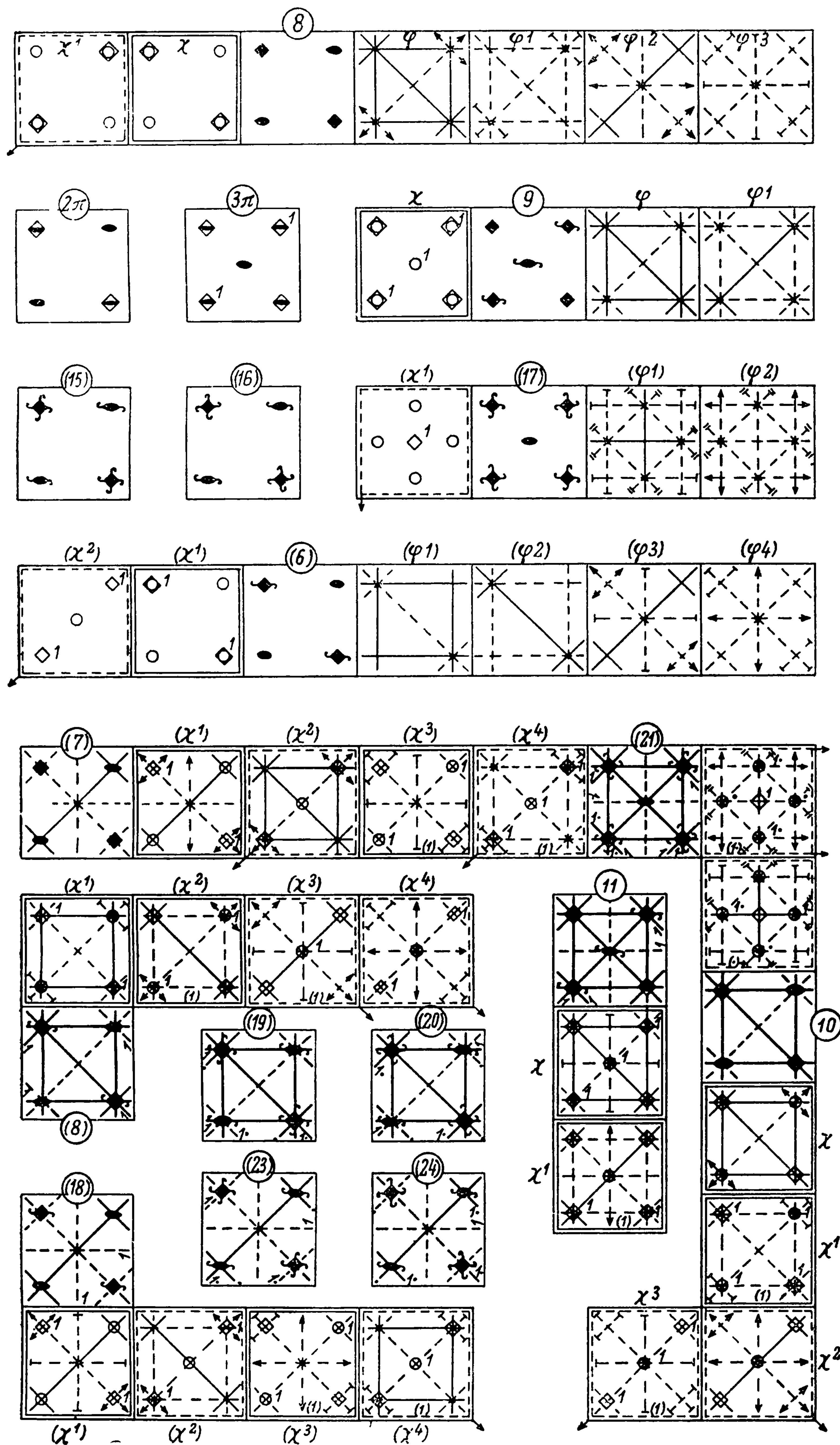

18 χ IV

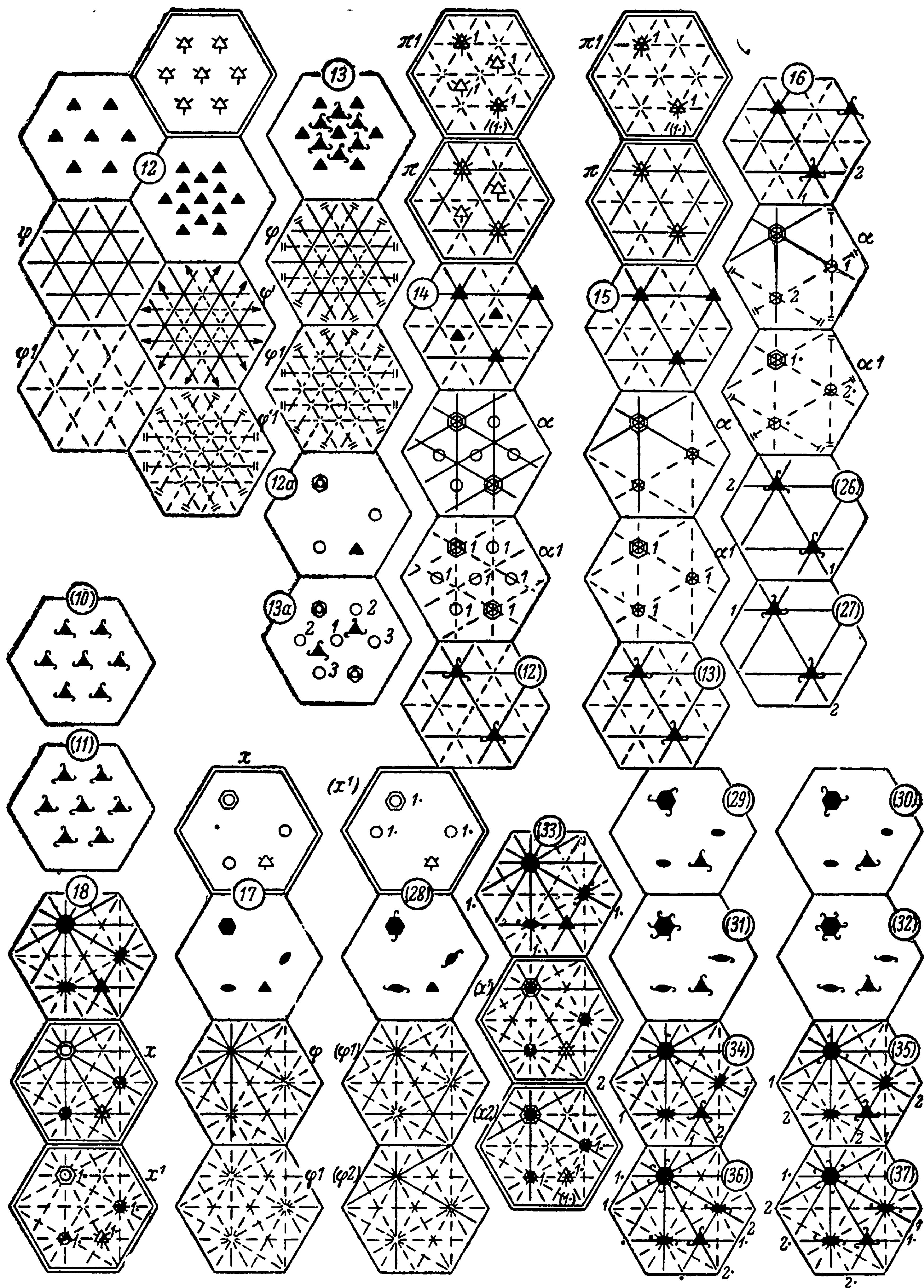

22 χ III

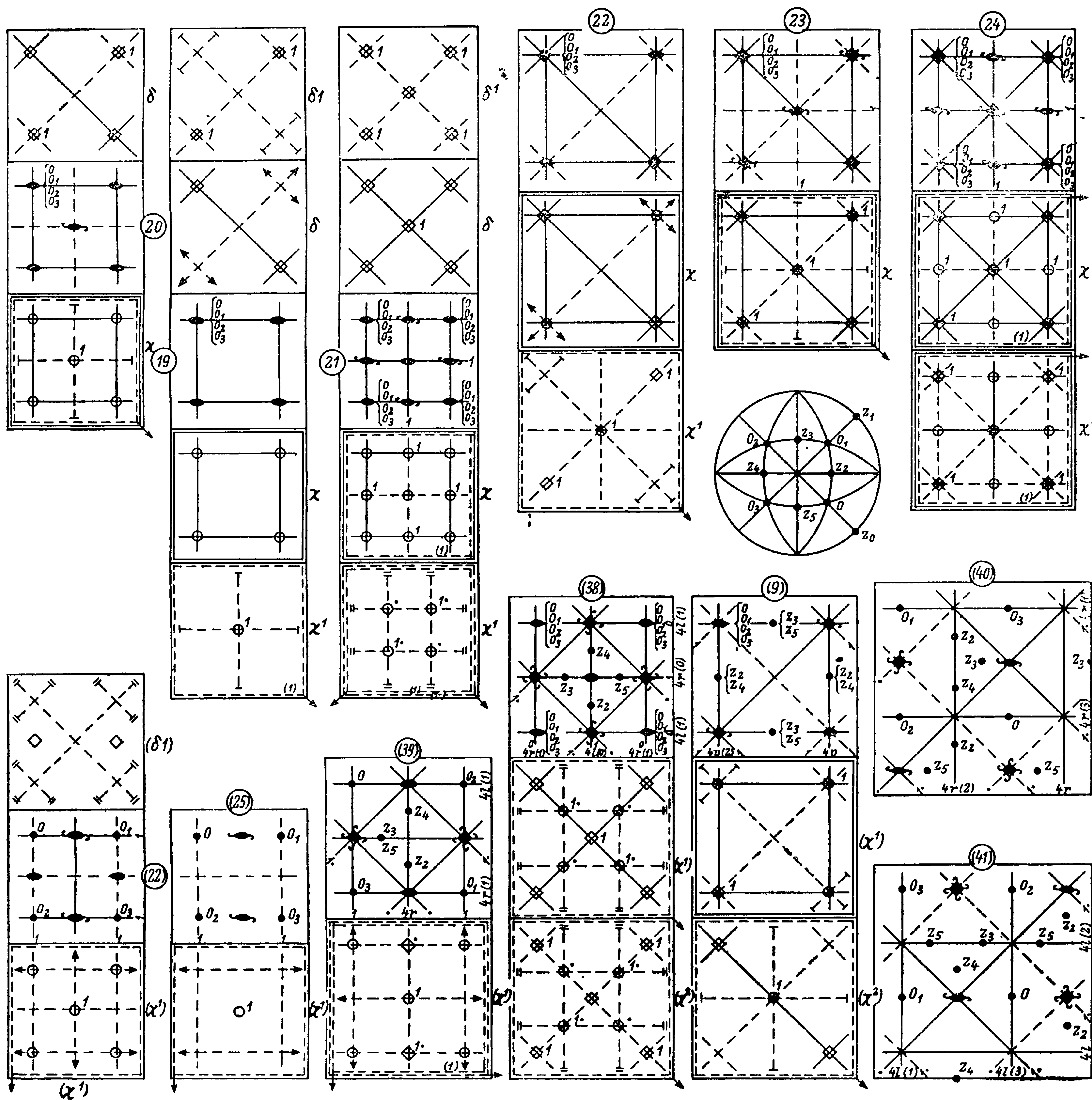

23 χ VII


24 χ VI

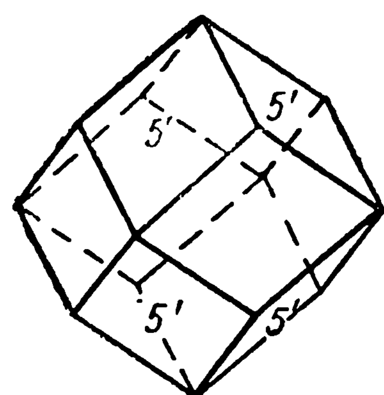




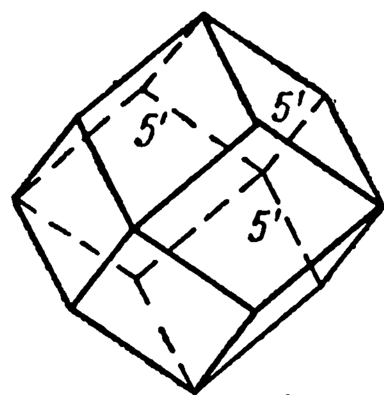




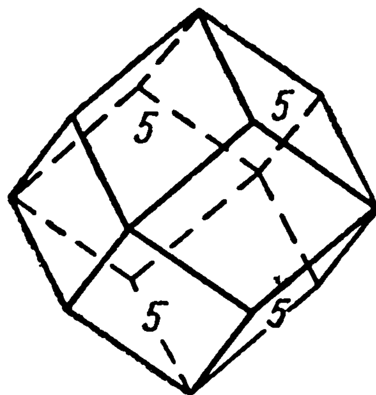
22
23
24
20
19
21
δ
δ1
χ
χ'
z1
z0
38
9
40
25
39
41
(δ1)
(22)
(χ')
(χ²)



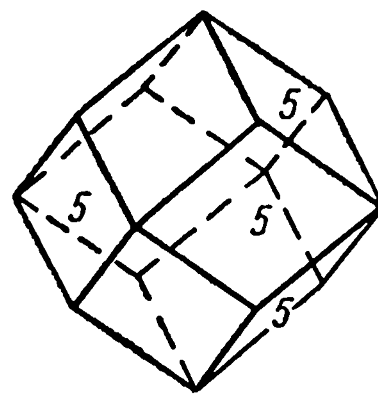
$1\pi(1VI)^{s}$



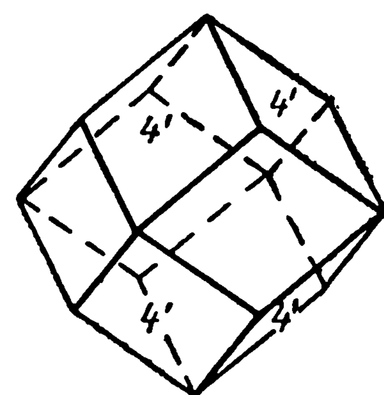
$1\pi(1VI)^{s'}$



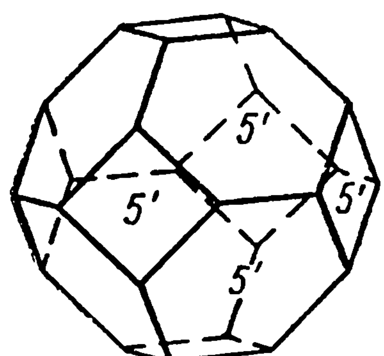
$(1)(1VI)^{s}$



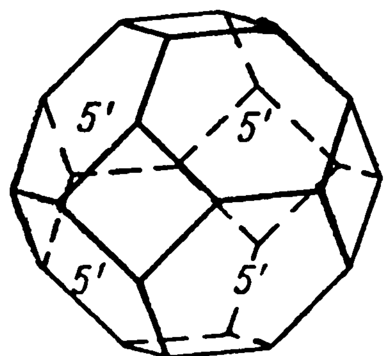
$3(1VI)^{s}$



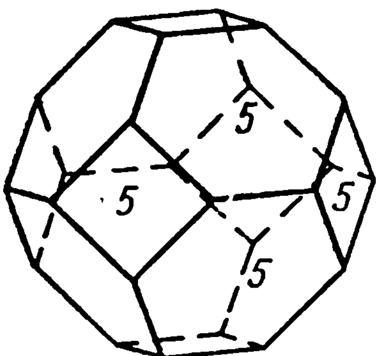
$(1)(1VI')^{s}$



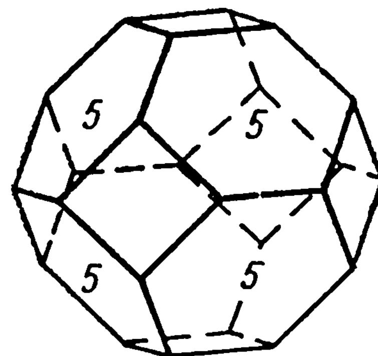
$1\pi(1VII)^{s}$



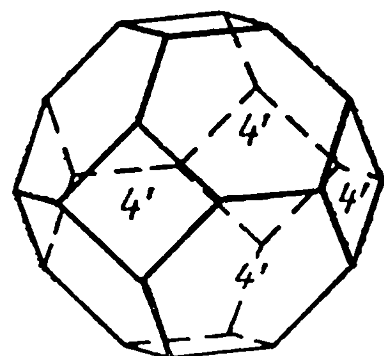
$1\pi(1VII)^{g}$



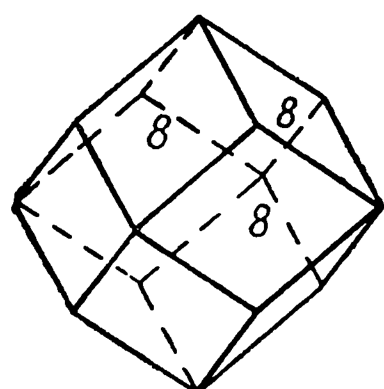
$3(1VII)^{s}$



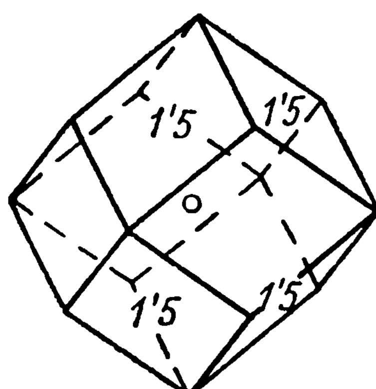
$(1)(1VII)^{g}$



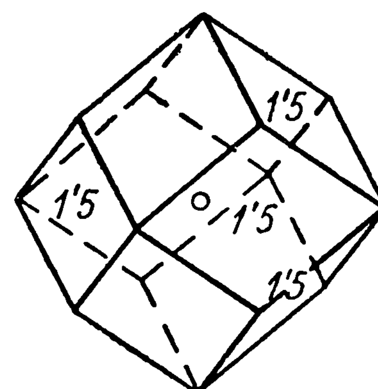
$3(1VII')^{s}$



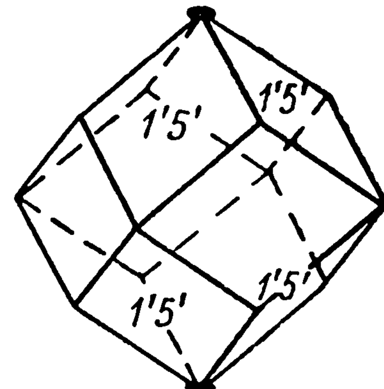
$1\chi'1(1VI')^{s}$



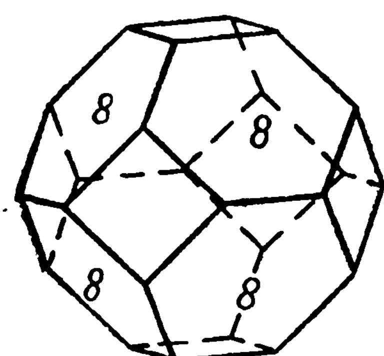
$1(\chi 2)(1\pi VI)^{s}$



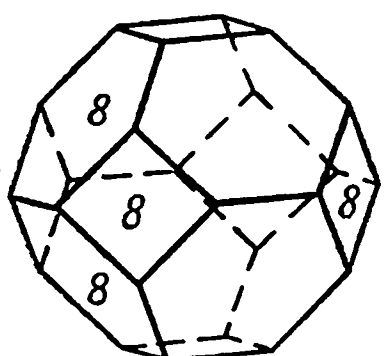
$3\chi 1(1\pi VI)^{s}$



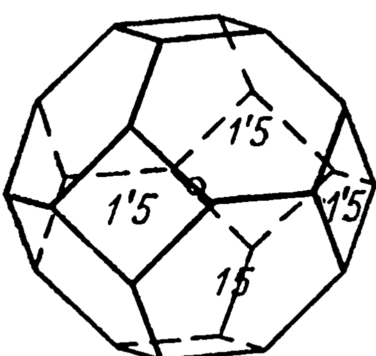
$2\chi 1(3VI)^{s}$



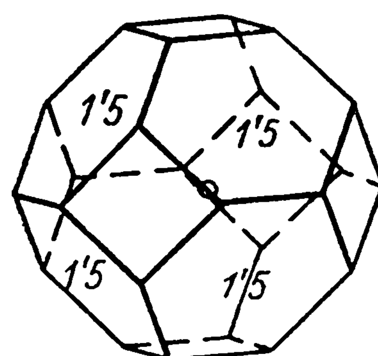
$1\chi'1(1VII')^{g}$



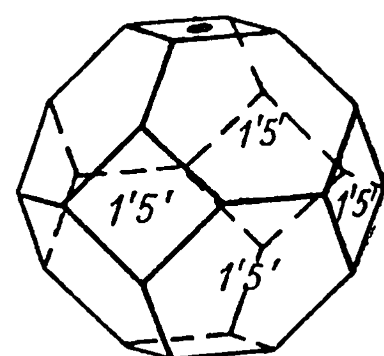
$1\chi 1(1VII)^{s}$



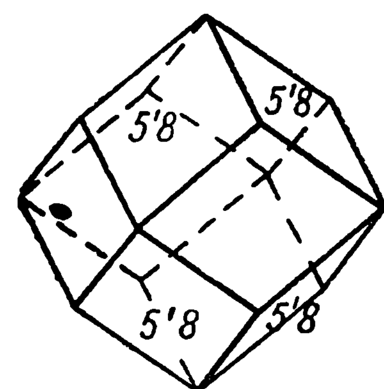
$3\chi 1(1\pi VII)^{s}$



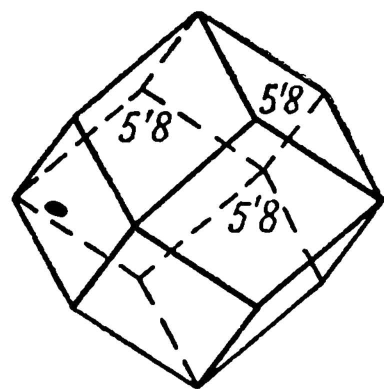
$1(\chi 2)(1\pi VII)^{g}$



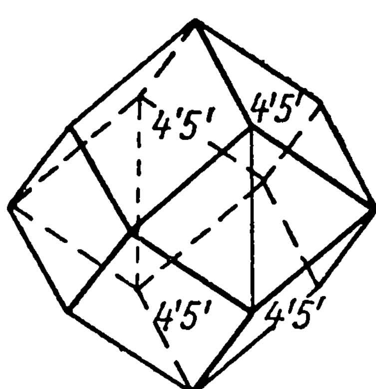
$3\chi 1(3VII)^{s}$



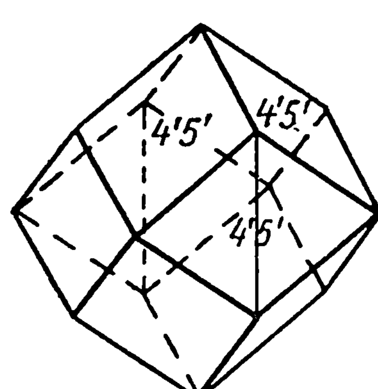
$2\chi 1(3VI')^{s}$



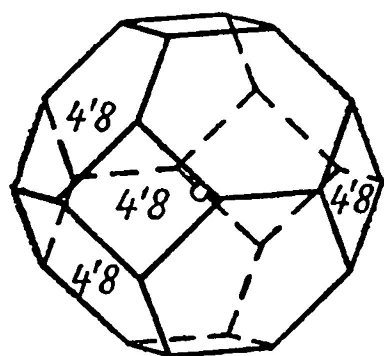
$3\chi 1(3VI')^{s}$



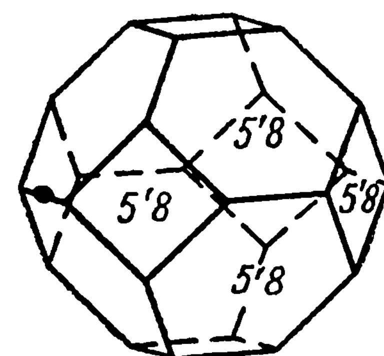
$1(\chi 1)(1\chi'VI')^{s}$



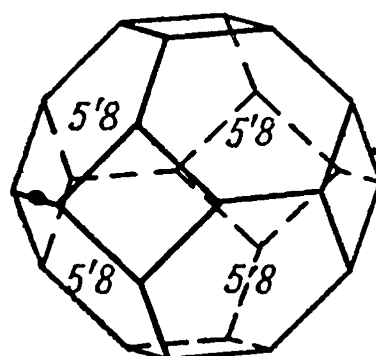
$3\chi(1\chi'VI')^{s}$



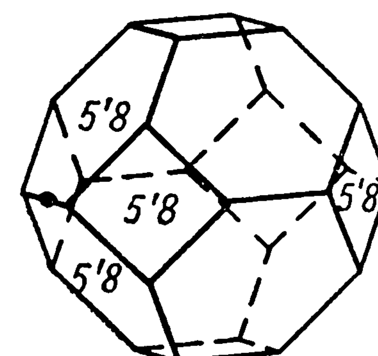
$1(\chi 2)(1\pi VII')^{s}$



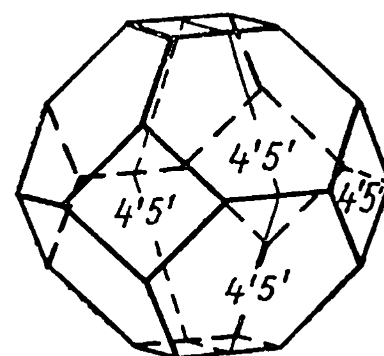
$3\chi 1(4VII')^{s}$



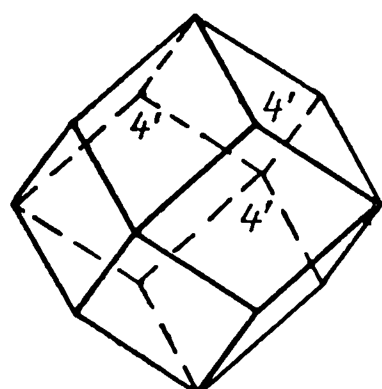
$3\chi 1(4VII')^{g}$



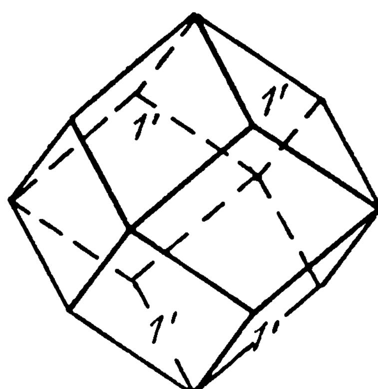
$2\chi 1(4VII')^{s}$



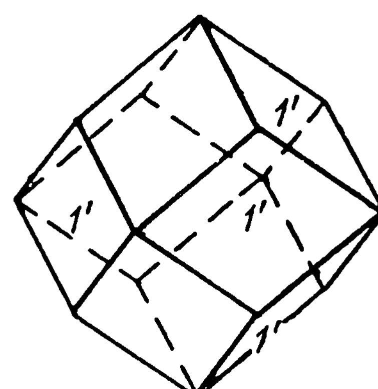
$3\chi(1\chi'VII)^{s}$



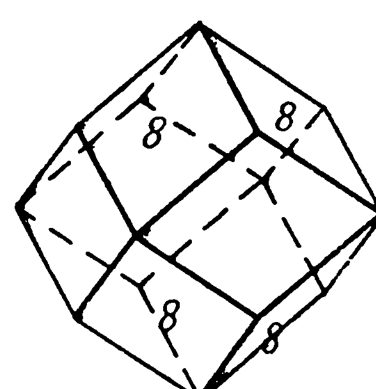
$3(1VI')^{s}$



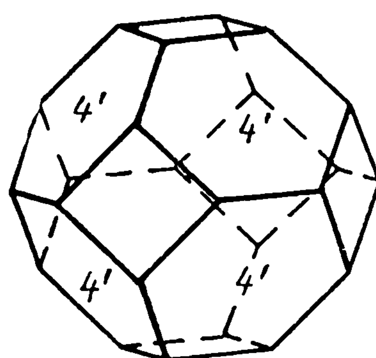
$1\chi 1(1VI)^{s}$



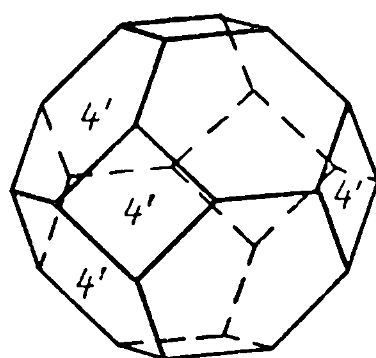
$1\chi' 1(1VI)^{s}$



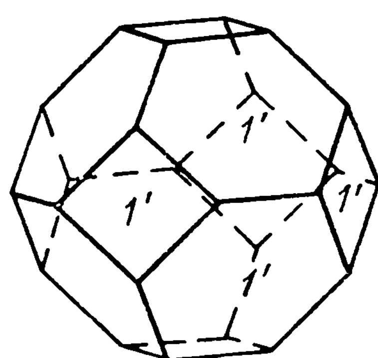
$1\chi 1(1VI')^{s}$



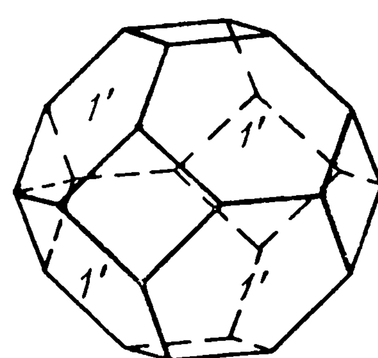
$3(1VII')^{g}$



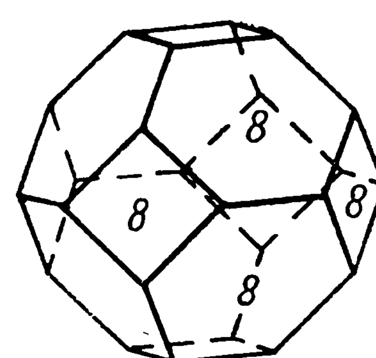
$(1)(1VII)^{s}$



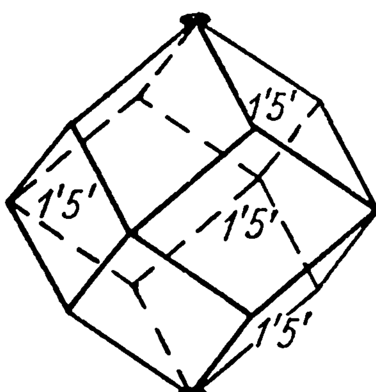
$1\chi' 1(1VII)^{s}$



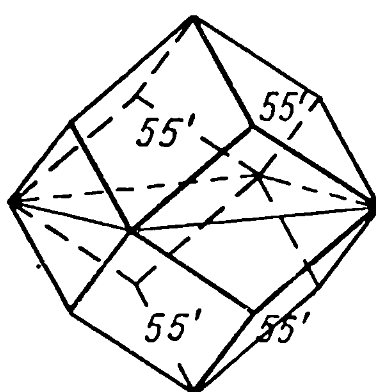
$1\chi 1(1VII)^{g}$



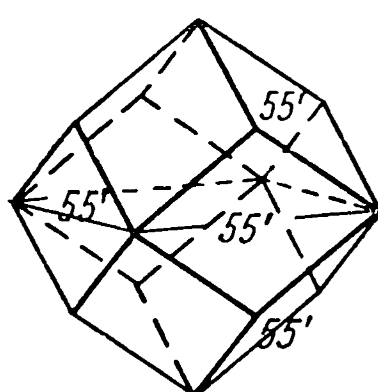
$1\chi' 1(1VII)^{s}$



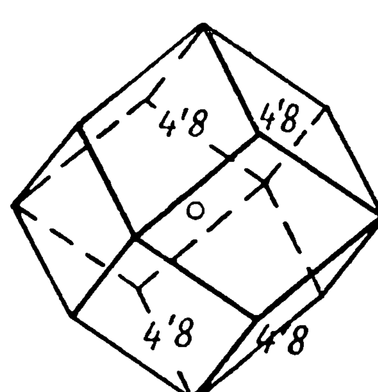
$3\chi 1(3VI)^{s}$



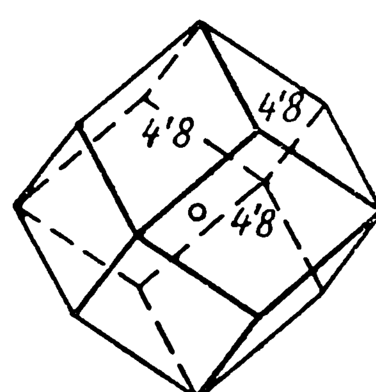
$1(\chi 1)(1\chi' VI)^{s}$



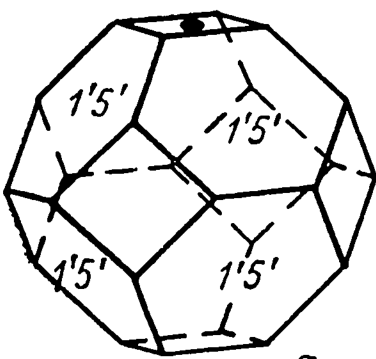
$3\chi(1\chi' VI)^{s}$



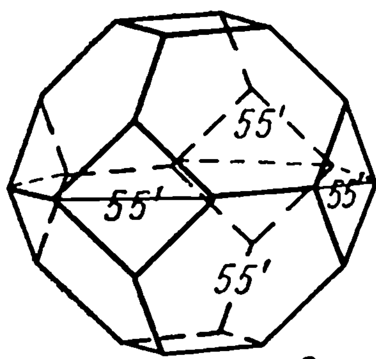
$1(\chi 2)(1\pi VI')^{s}$



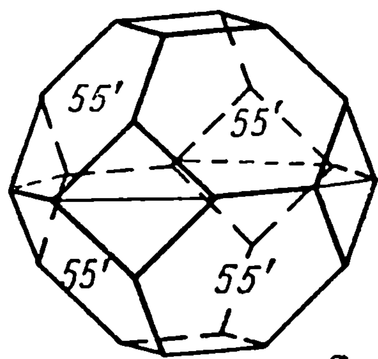
$3\chi 1(1\pi VI')^{s}$



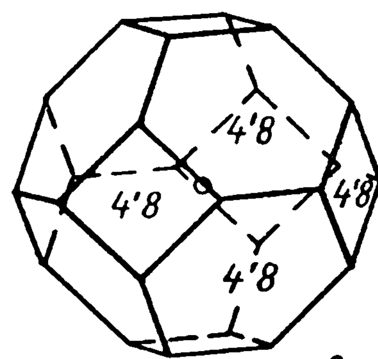
$2\chi 1(3VII)^{g}$



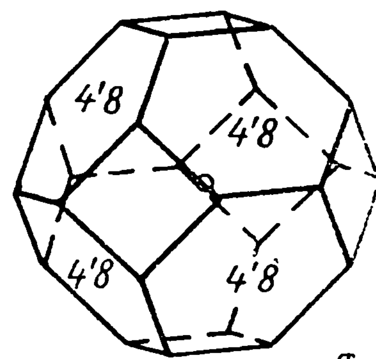
$3\chi(1\chi' VII)^{s}$



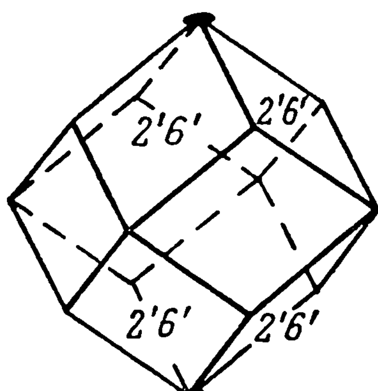
$1(\chi 1)(1\chi' VII)^{g}$



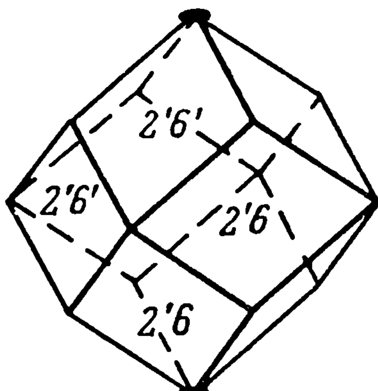
$3\chi 1(1\pi VII')^{s}$



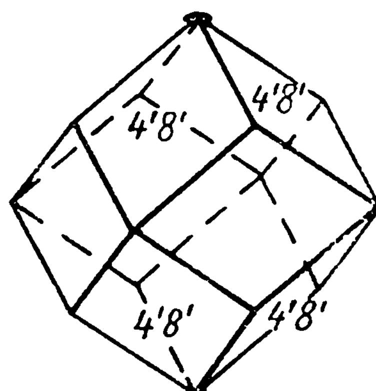
$3\chi 1(1\pi VII')^{g}$



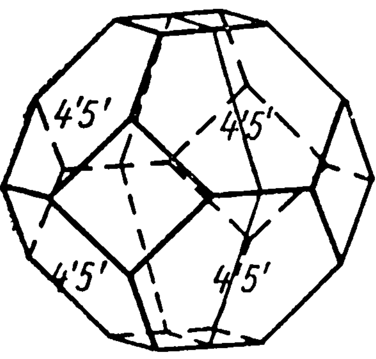
$5(3VI)^{s}$



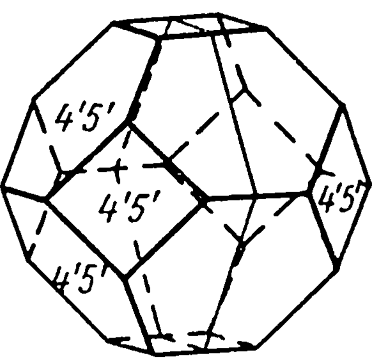
$(4)(3VI)^{s}$



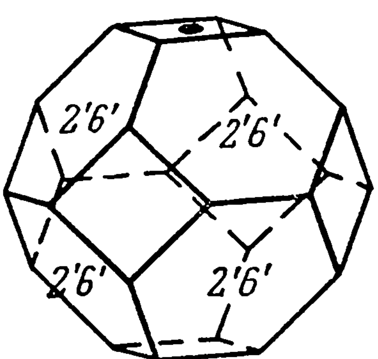
$(2)(3VI)^{s}$



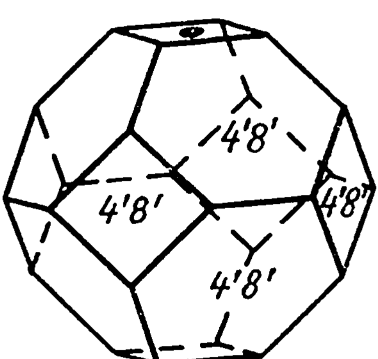
$3\chi(1\chi' VII')^{g}$



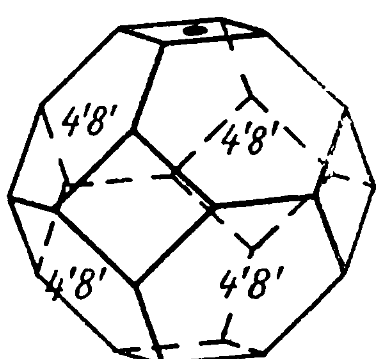
$1(\chi 1)(1\chi' VII')^{s}$



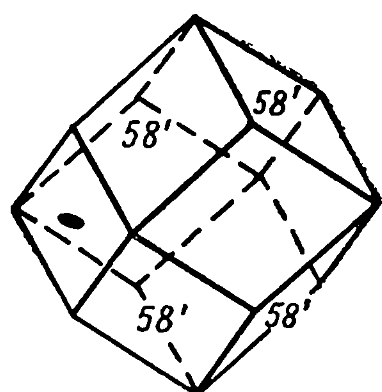
$(2)(3VII)^{g}$



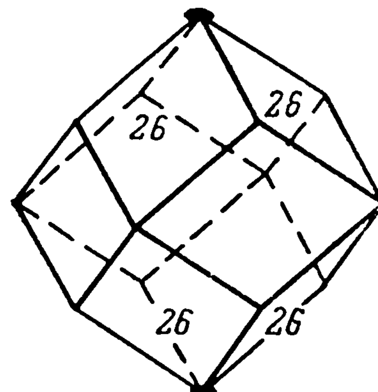
$(4)(3VII)^{s}$



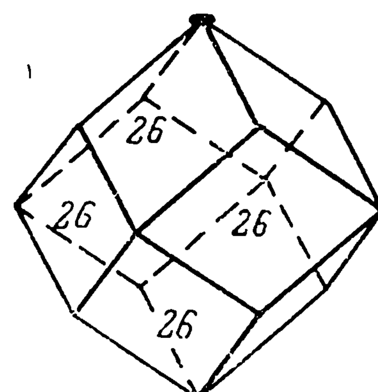
$5(3VII)^{g}$



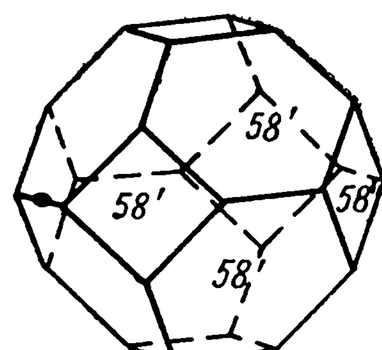
$(2)(3VI')^{s}$



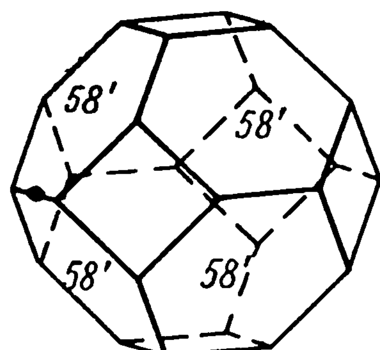
$3\varphi'1(3VI)^{s}$



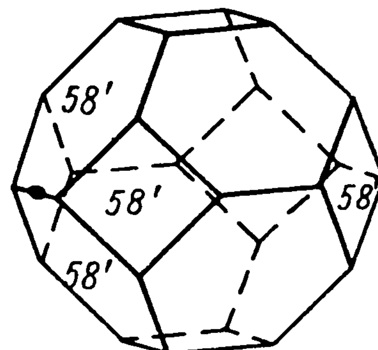
$3\varphi 3(3VI)^{s}$



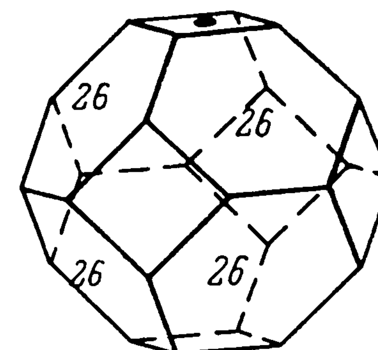
$(4)(3VII')^{s}$



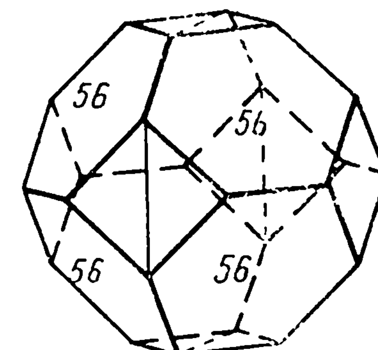
$(4)(3VII')^{g}$



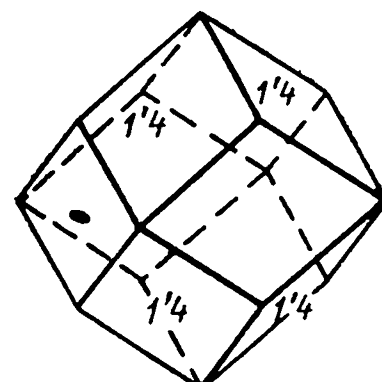
$5(3VII')^{s}$



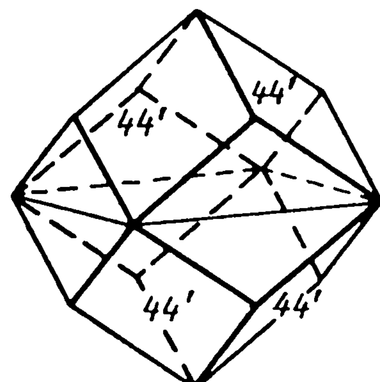
$2(\varphi 4)(3VII)^{g}$



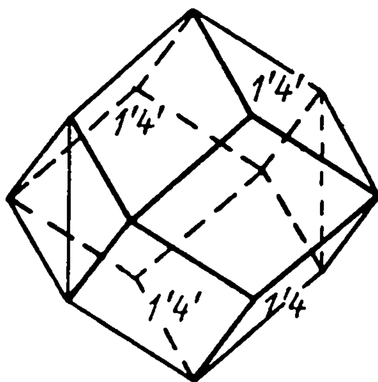
$1(\varphi 2)(1\chi' VII)^{g}$



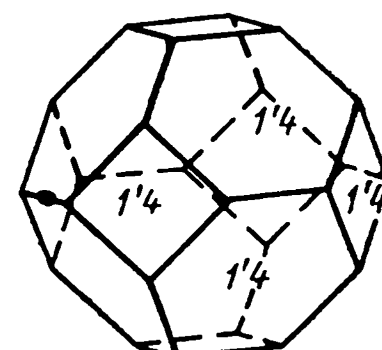
$2\varphi 4(3VI')^{s}$



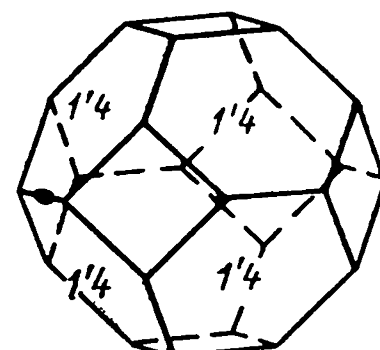
$1(\varphi 2)(1\chi' VI)^{s}$



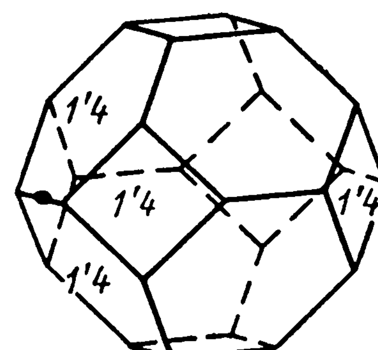
$1(\varphi 2)(1\chi' VI')^{s}$



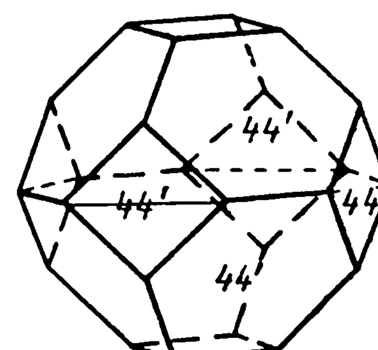
$3\varphi 3(3VII')^{s}$



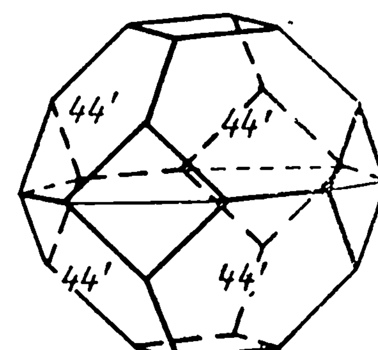
$3\varphi 3(3VII')^{g}$



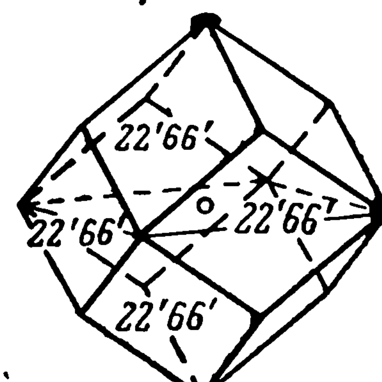
$2\varphi'1(3VII')^{s}$



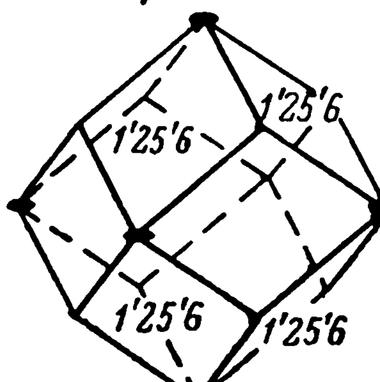
$3\varphi 1(1\chi' VII)^{s}$



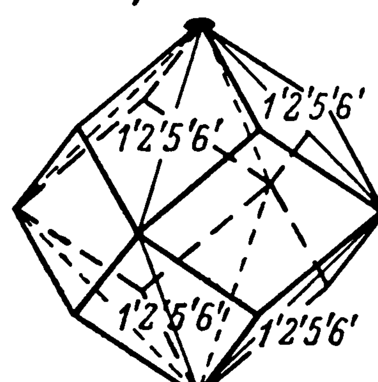
$3\varphi 2(1\chi' VII)^{T}$



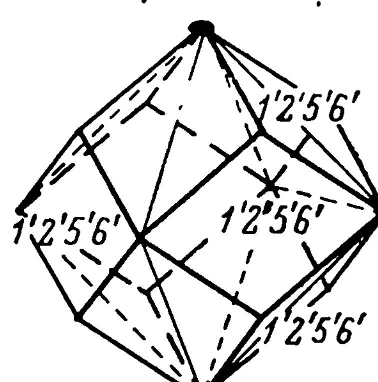
$4(\chi 2)(3\chi VI)^{s}$



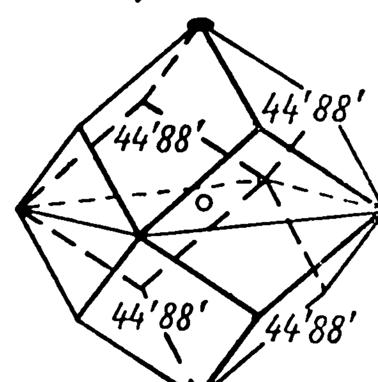
$5\chi 3(7VI)^{s}$



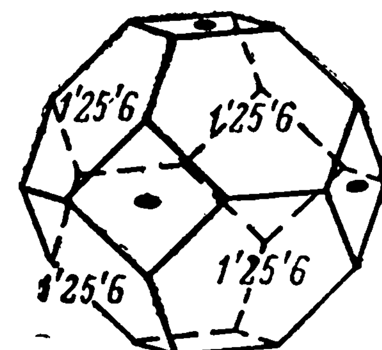
$5\chi 2(3\varphi'' VI)^{s}$



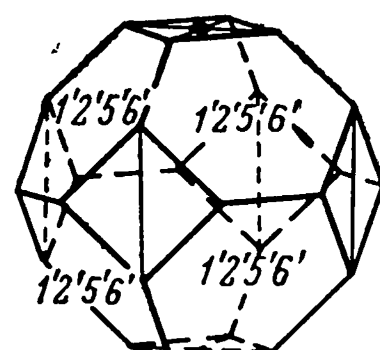
$4(\chi 1)(3\varphi'' VI)^{s}$



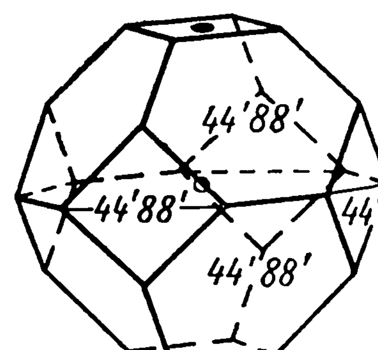
$2(\chi 4)(3\chi VI)^{s}$



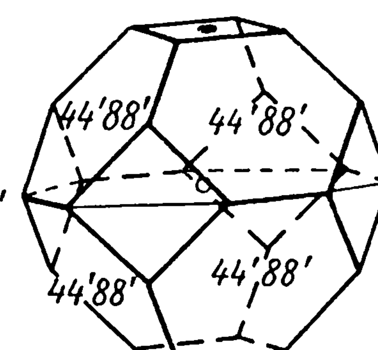
$4\chi 3(6VII)^{g}$



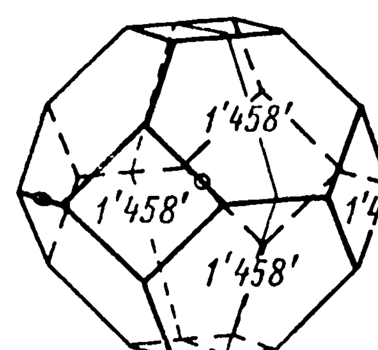
$2(\chi 3)(3\varphi' VII)^{g}$



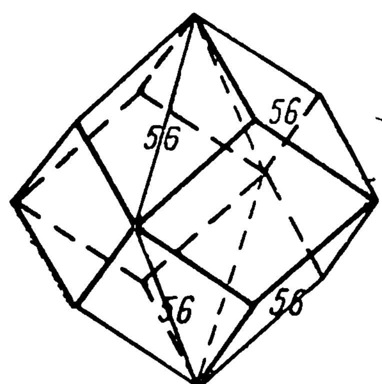
$4(\chi 2)(3\chi VII)^{s}$



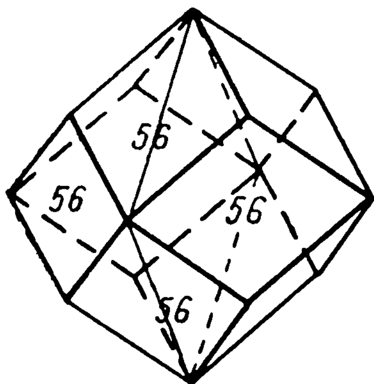
$5\chi 1(3\chi VII)^{g}$



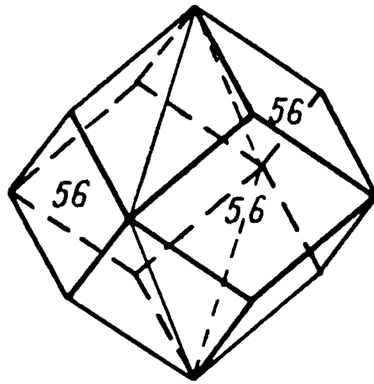
$4(\chi 2)(3\chi VII')^{s}$



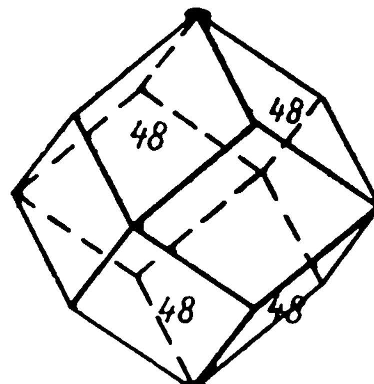
$1(\varphi 5)(1\chi'VI)^{s}$



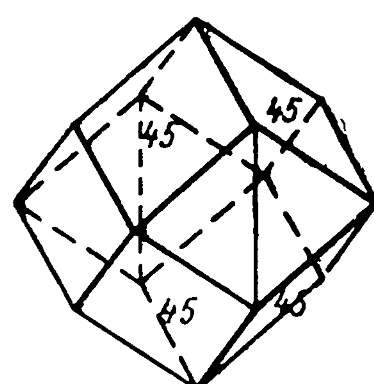
$3\varphi 1(1\chi'VI)^{s}$



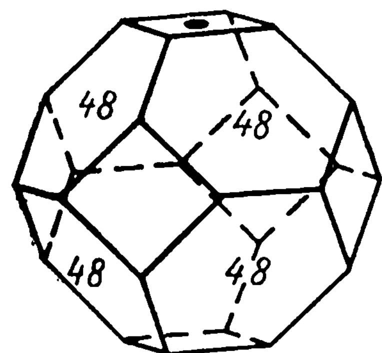
$3\varphi 2(1\chi'VI)^{s}$



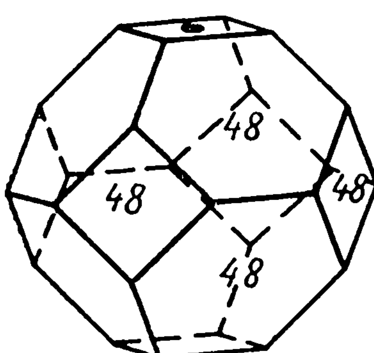
$2\varphi 4(3VI)^{s}$



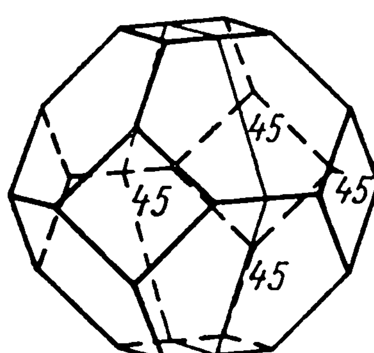
$1(\varphi 2)(1\chi'VI')^{s}$



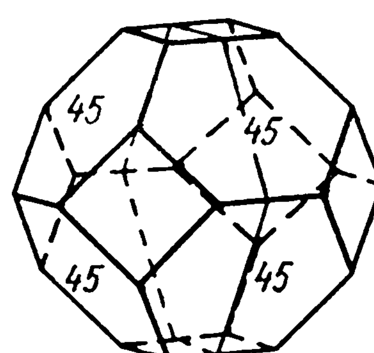
$2\varphi'1(3VII)^{g}$



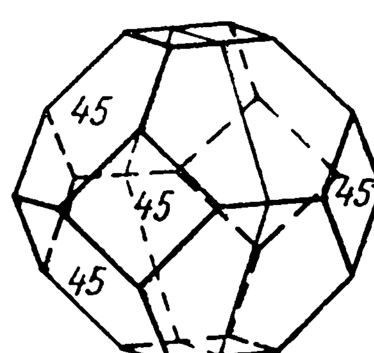
$3\varphi 3(3VII)^{s}$



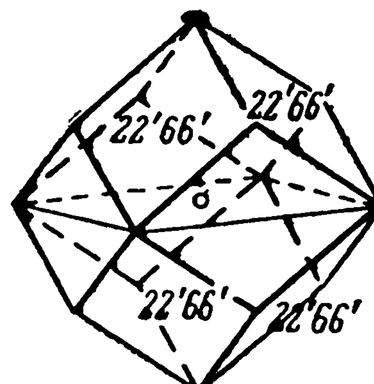
$3\varphi 1(1\chi'VII')^{s}$



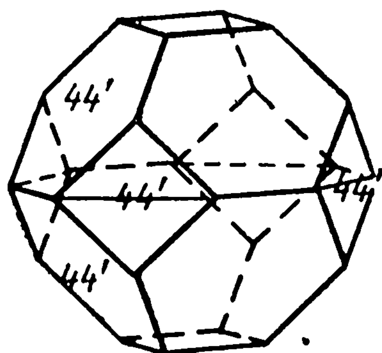
$1(\varphi 5)(1\chi'VII')^{g}$



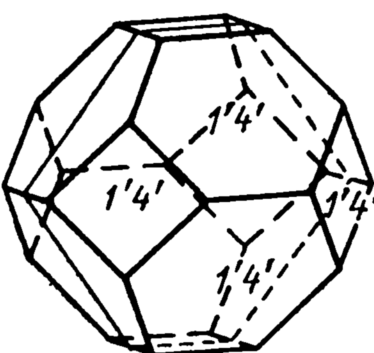
$3\varphi 2(1\chi'VII')^{s}$



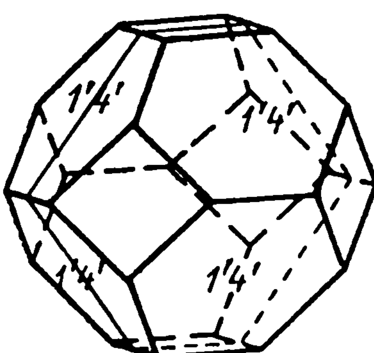
$5\chi 1(3\chi VI)^{s}$



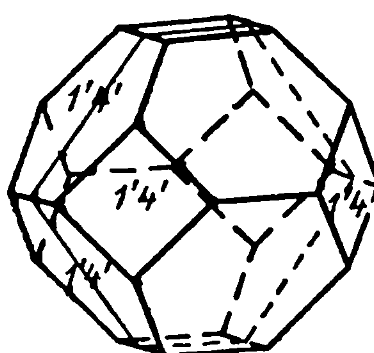
$1(\varphi 5)(1\chi'VII)^{s}$



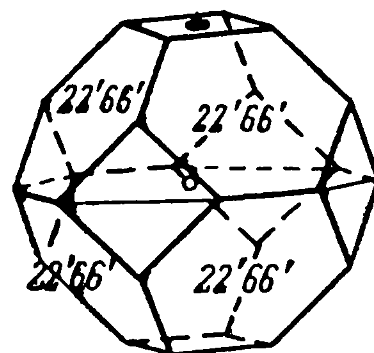
$3\varphi 2(1\chi'VII')^{s}$



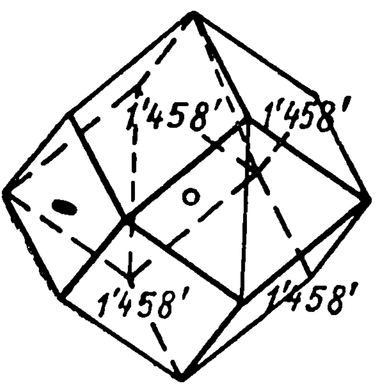
$3\varphi 1(1\chi'VII')^{g}$



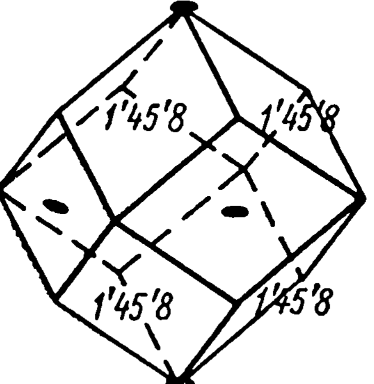
$1(\varphi 5)(1\chi'VII')^{s}$



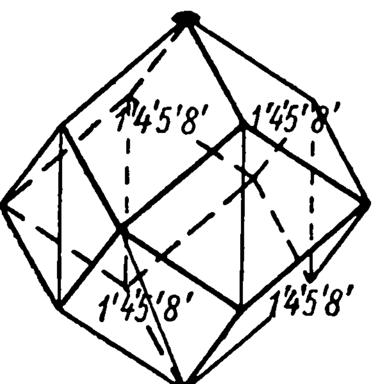
$2(\chi 4)(3\chi VII)^{g}$



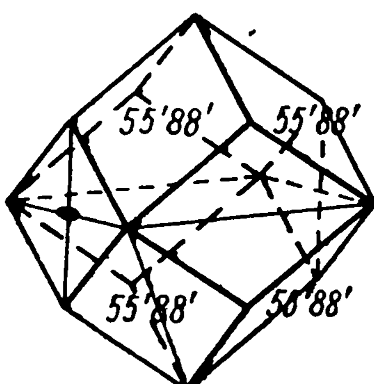
$2(\chi 4)(3\chi VI')^{s}$



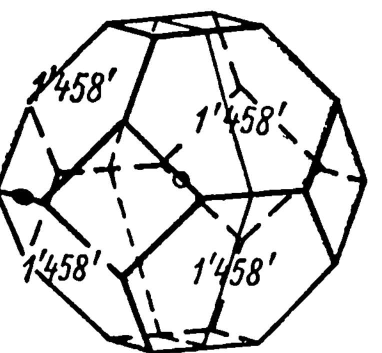
$4\chi 3(6VI)^{s}$



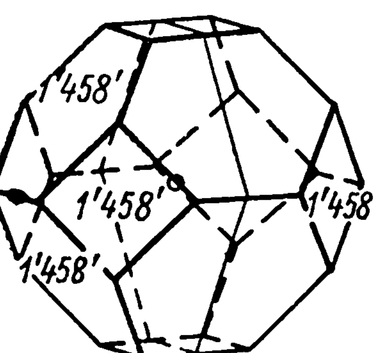
$2(\chi 3)(3\varphi'VI)^{s}$



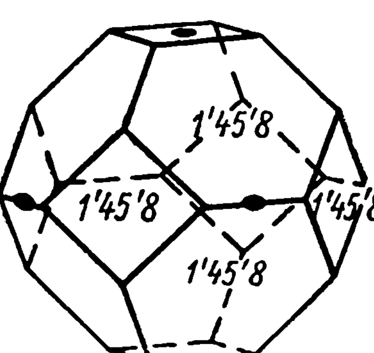
$2(\chi 3)(3\varphi'VI')^{s}$



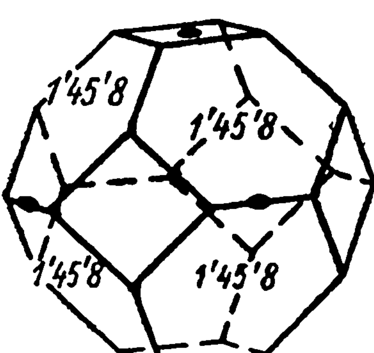
$4(\chi 2)(3\chi VII')^{g}$



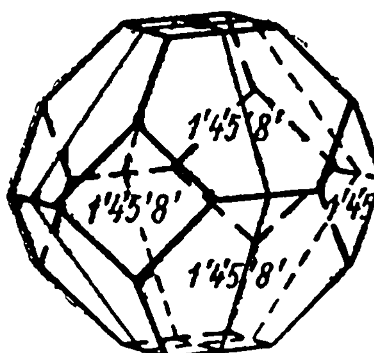
$5\chi 1(3\chi VII')^{s}$



$5\chi 3(7VII)^{s}$

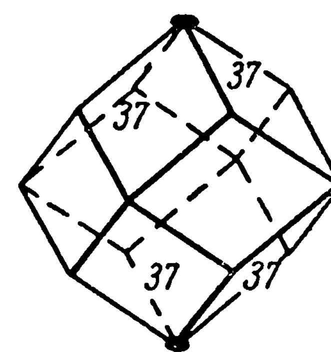


$5\chi 3(7VII)^{g}$

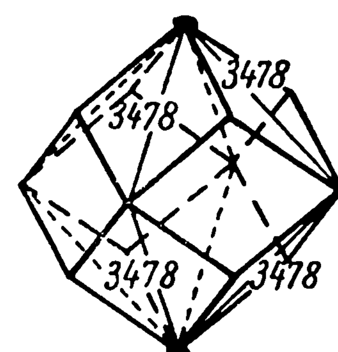


$4(\chi 1)(3\varphi''VII)^{S}$

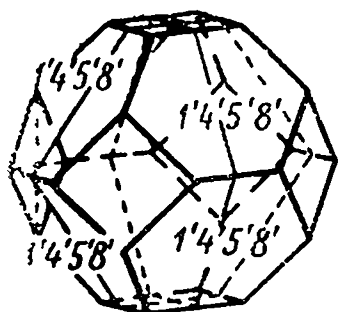
ТАБЛИЦА VIII



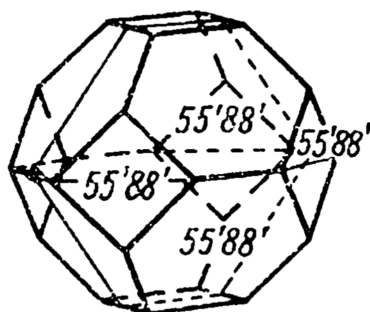
$(6)(3\,VI)^{s}$



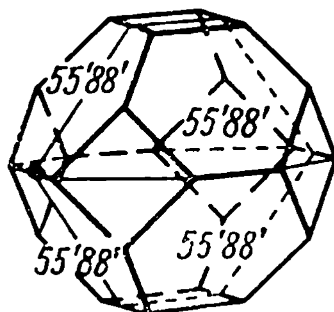
$6(\varphi 3)(3\varphi''VI)^{s}$



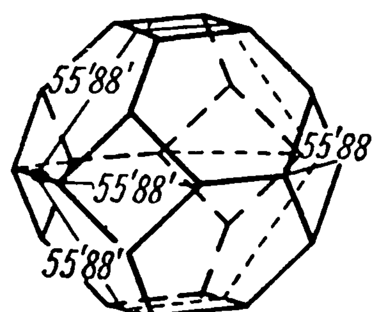
$5\chi 2(3\varphi''VII)^{g}$



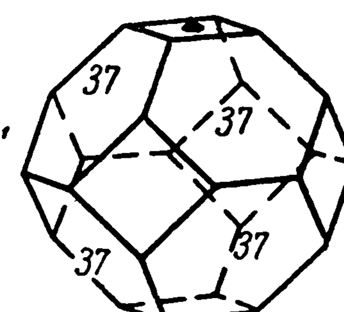
$4(\chi 1)(3\varphi''VII')^{g}$



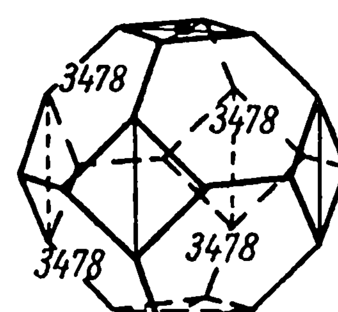
$4(\chi 1)(3\varphi''VII')^{g}$



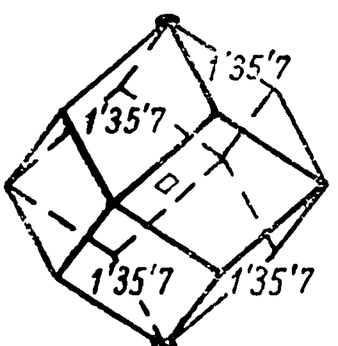
$5\chi 2(3\varphi''VII')^{s}$



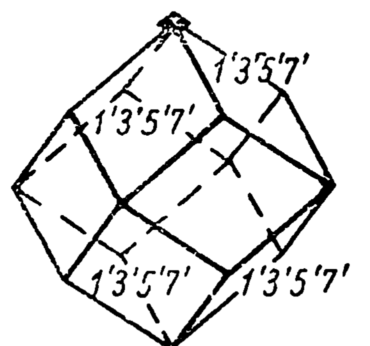
$(6)(3\,VII)^{g}$



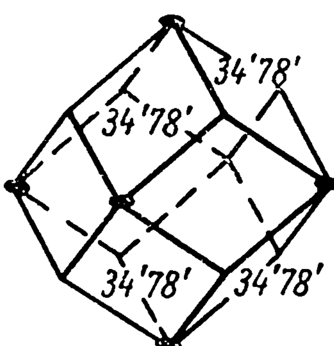
$6(\varphi 1)(3\varphi'VII)^{g}$



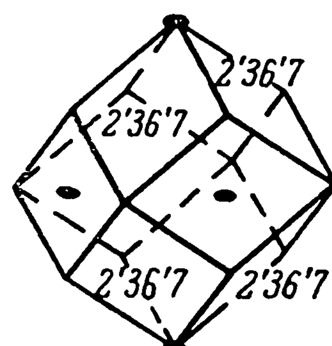
$6(\chi 2)(3\pi\,VI)^{s}$



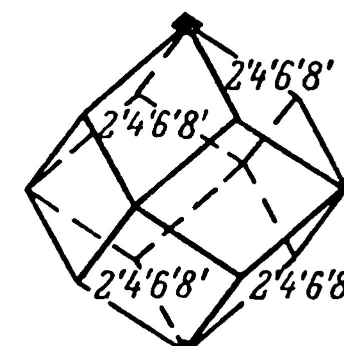
$8\chi 1\,(9\,VI)^{s}$



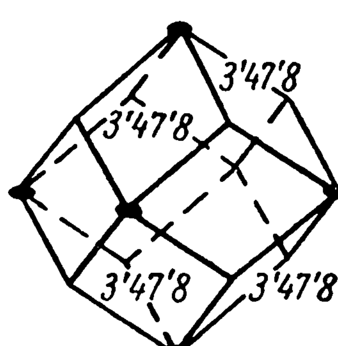
$(18)(7\,VI)^{s}$



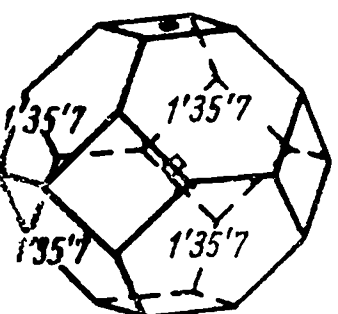
$(8)(6\,VI)^{s}$



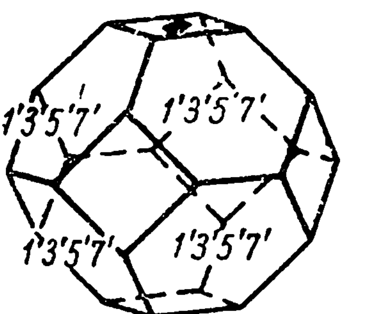
$(7)(9\,VI)^{s}$



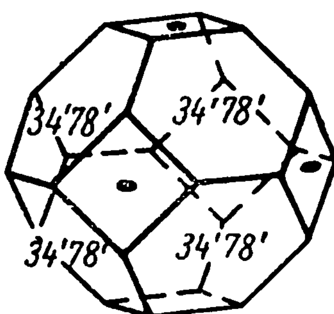
$5\delta 3\,(7\,VI)^{s}$



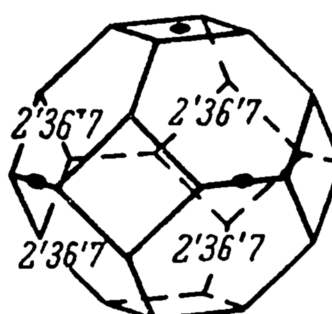
$6(\chi 2)(3\pi\,VII)^{g}$



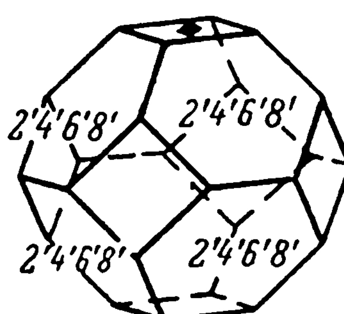
$8\chi 1(9\,VII)^{g}$



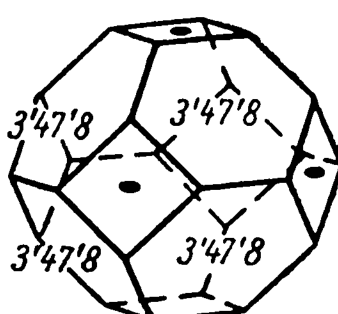
$(18)(6\,VII)^{g}$



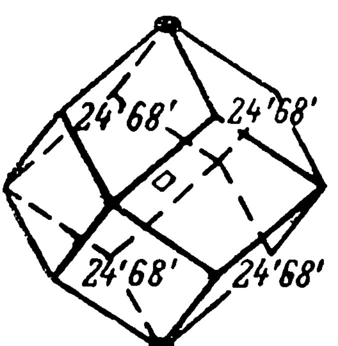
$(18)(7\,VII)^{g}$



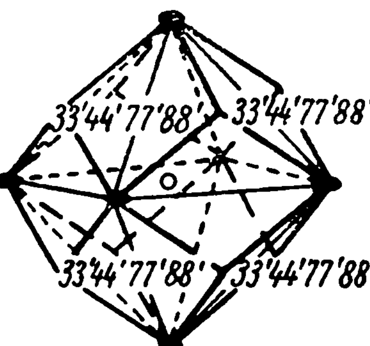
$(7)(9\,VII)^{g}$



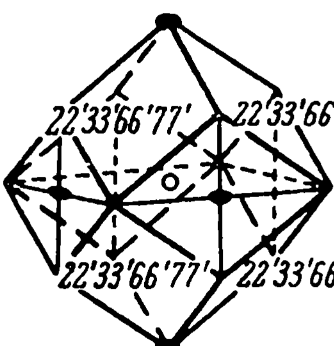
$4\delta 1\,(6\,VII)^{g}$



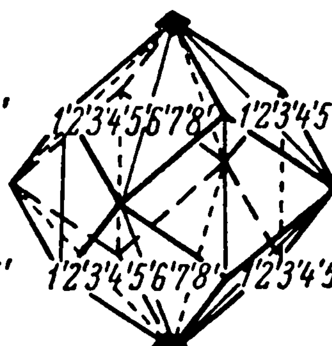
$2(\delta 2)(3\pi VI)^{s}$



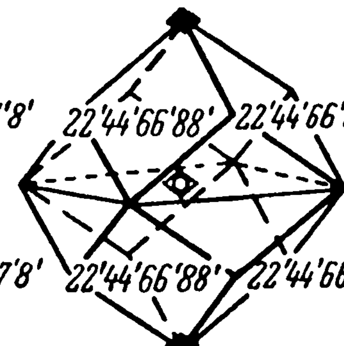
$18(\chi 1)(7\chi VI)^{s}$



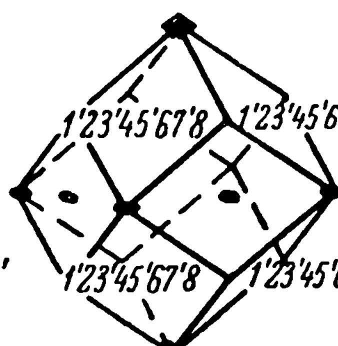
$8(\chi 1)(6\chi VI)^{s}$



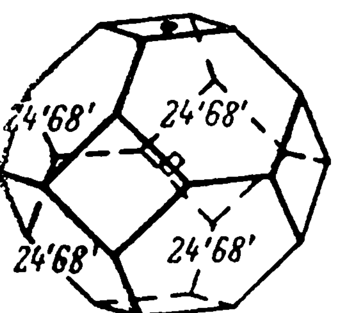
$7(\chi 2)(9\varphi VI)^{s}$



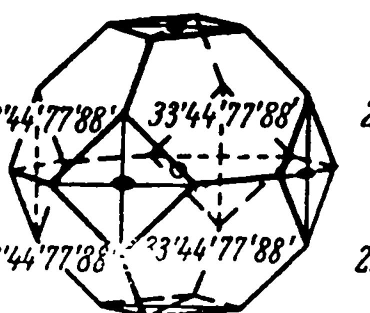
$7(\chi 3)(9\chi VI)^{s}$



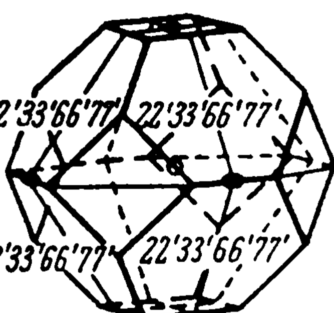
$10\chi 3\,(11\,VI)^{s}$



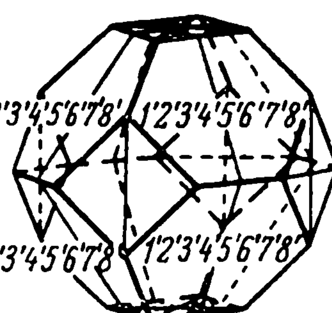
$5\delta 3\,(3\pi\,VII)^{g}$



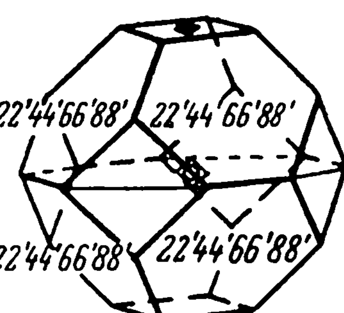
$8(\chi 1)(6\chi\,VII)^{g}$



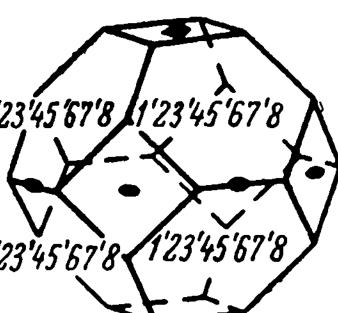
$18(\chi 1)(7\chi\,VII)^{g}$



$7(\chi 2)(9\varphi\,VII)^{g}$

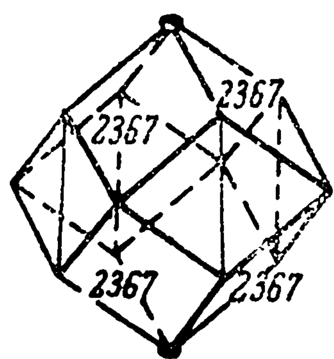


$7(\chi 3)(9\chi\,VII)^{g}$

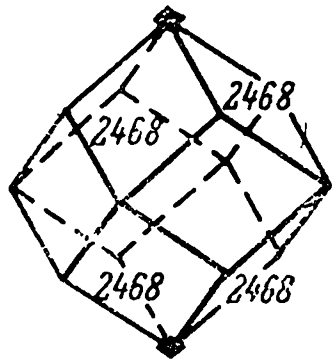


$10\chi 3\,(11\,VII)^{g}$

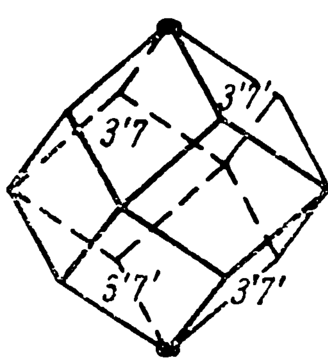
ТАБЛИЦА VIII (*продолжение*)



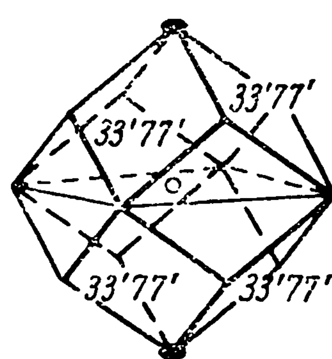
$6(\varphi 1)(3\varphi' VI)^s$



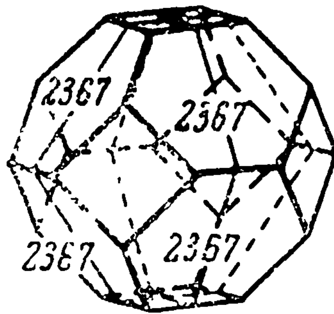
$8\varphi 3\,(9\,VI)^s$



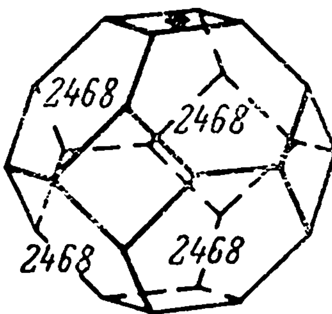
$2\pi\,(3\,VI)^s$



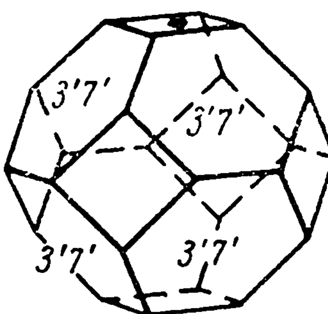
$6(\chi 1)(3\chi\,VI)^s$



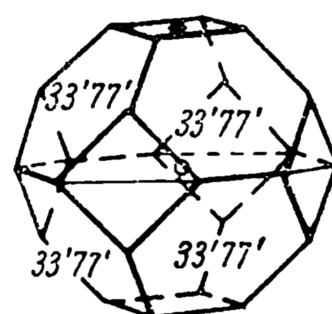
$6(\varphi 3)(3\varphi'' VII)^g$



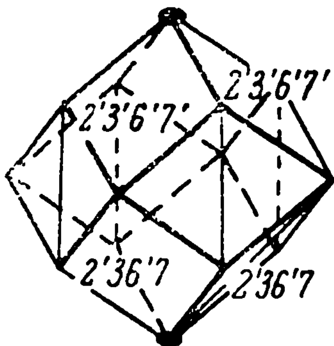
$8\varphi 3\,(9\,VII)^g$



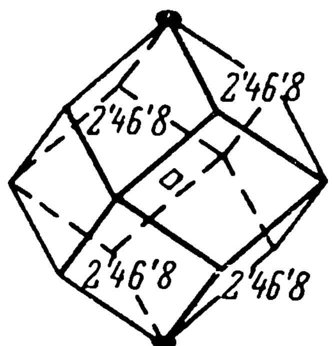
$2\pi\,(3\,VII)^g$



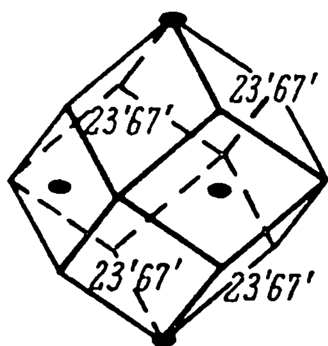
$6(\chi 1)(3\chi\,VII)^g$



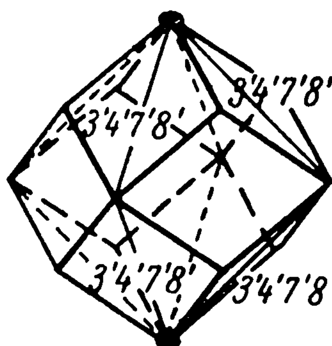
$5\delta(3\varphi' VI)^s$



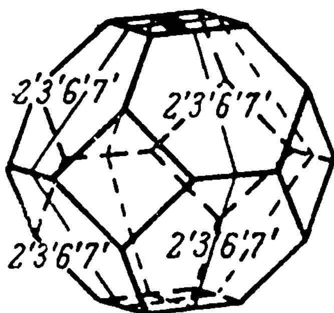
$5\delta 3\,(3\pi\,VI)^s$



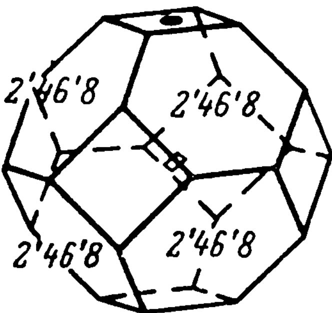
$4\delta 1\,(6\,VI)^s$



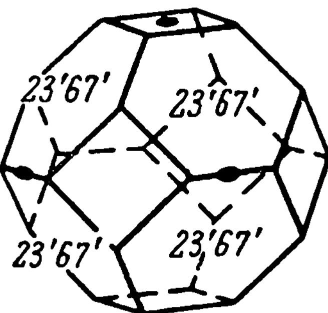
$2(\delta 1)(3\varphi'' VI)^s$



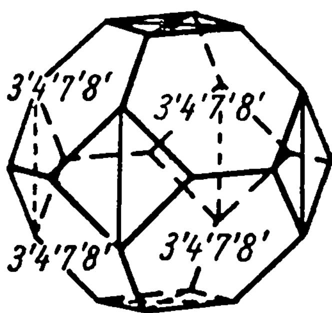
$2(\delta 1)(3\varphi'' VII)^g$



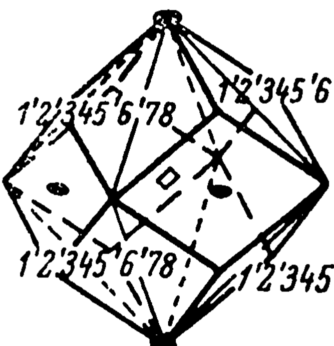
$2(\delta 2)(3\pi\,VII)^g$



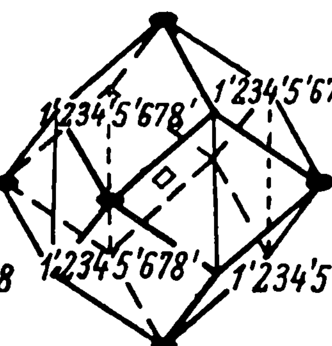
$5\delta 3\,(7\,VII)^g$



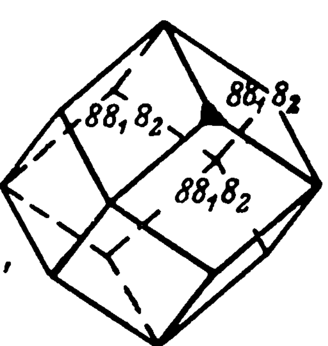
$5\delta(3\varphi' VII)^g$



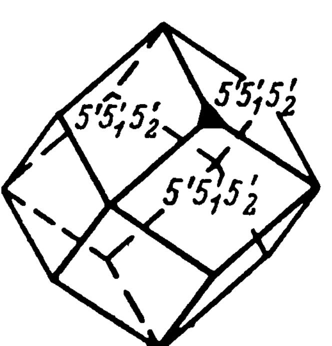
$8(\chi 3)(6\delta\,VI)^s$



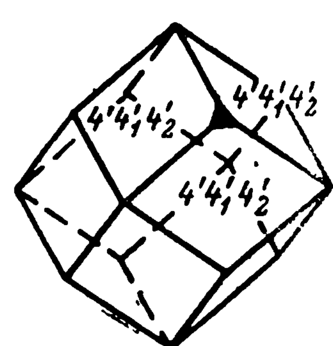
$18(\chi 4)(7\delta\,VI)^s$



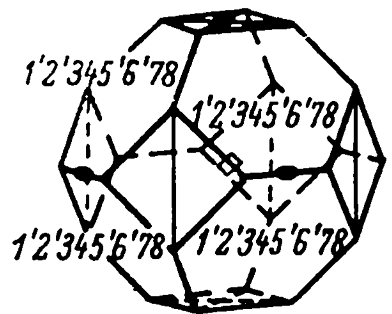
$13\varphi 1\,(13\,VI)^s$



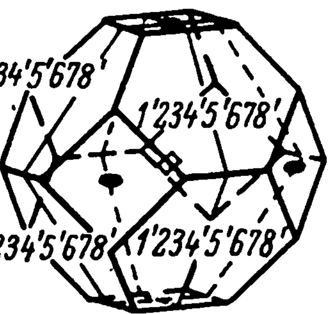
$13\alpha\,(13\,VI)^s$



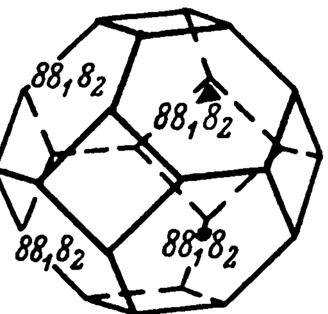
$16\,(13\,VI)^s$



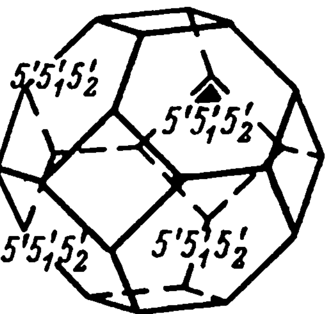
$18\,(\chi 4)(7\delta\,VII)^g$



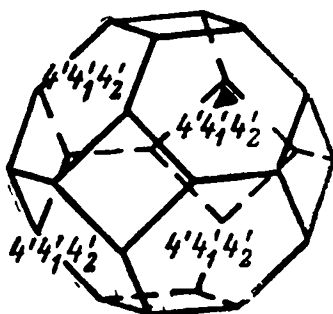
$8(\chi 3)(6\delta\,VII)^g$



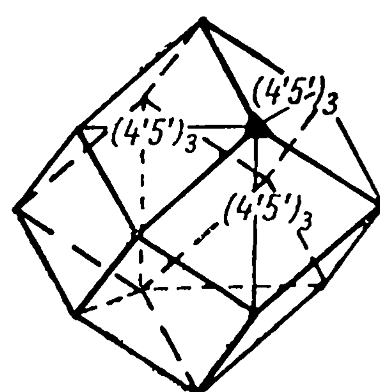
$13\varphi 1\,(13\,VII)^g$

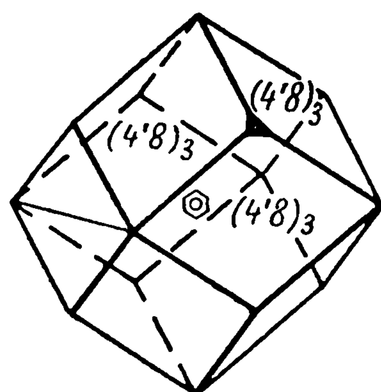


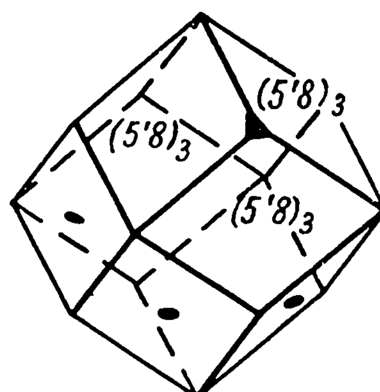
$13\alpha\,(13\,VII)^g$

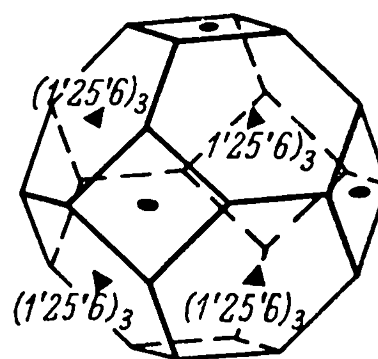


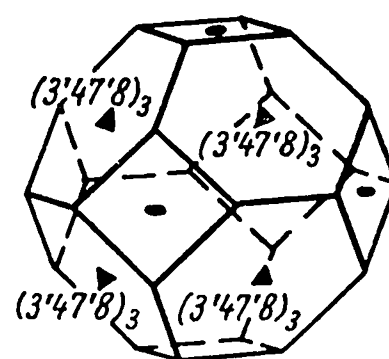
$16\,(13\,VII)^g$

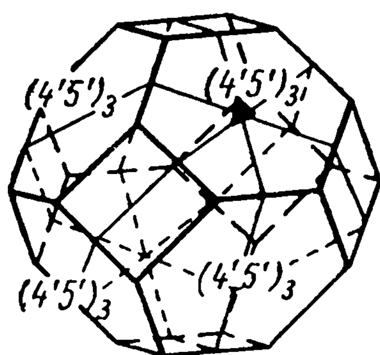

$16\alpha(13\varphi VI)^{s}$

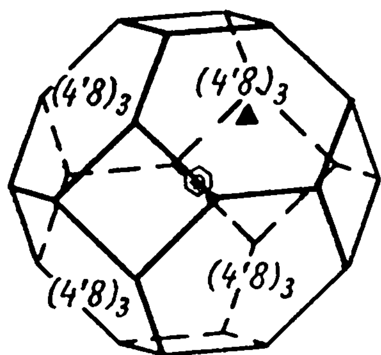

$16\alpha 1(13\alpha VI)^{s}$

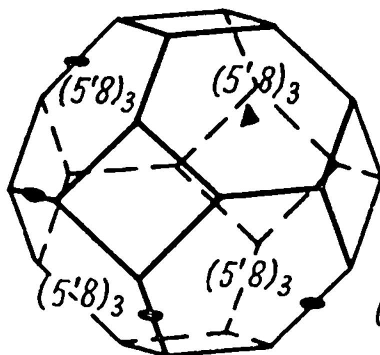

$16\alpha 1(16 VI)^{s}$

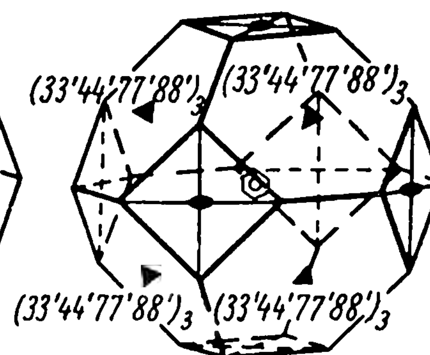

$19\chi 1(20 VII)^{g}$

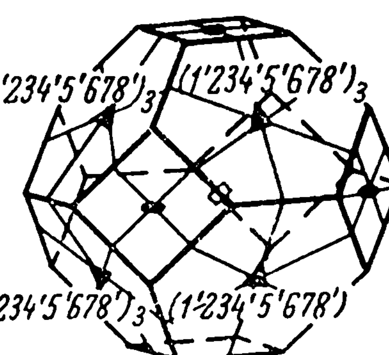

$19\delta 1(20 VII)^{g}$

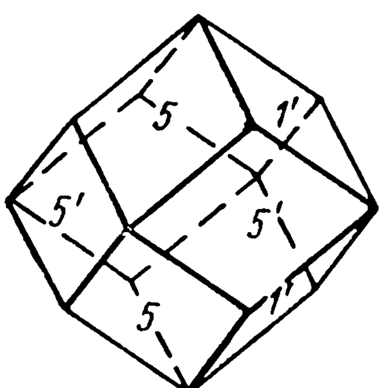

$16\alpha(13\varphi VII)^{g}$

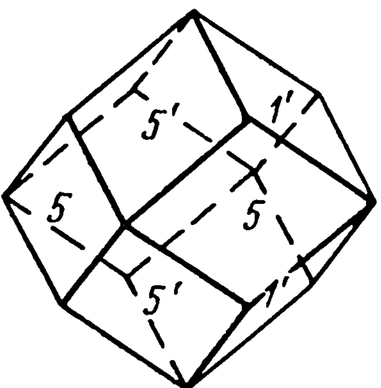

$16\alpha 1(13\alpha VII)^{g}$

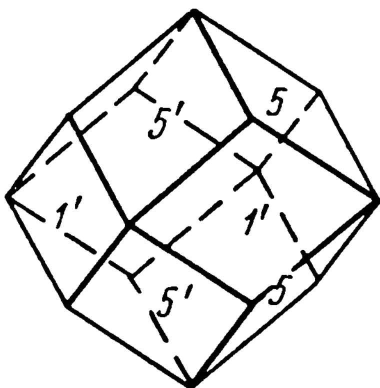

$16\alpha 1(16 VII)^{g}$

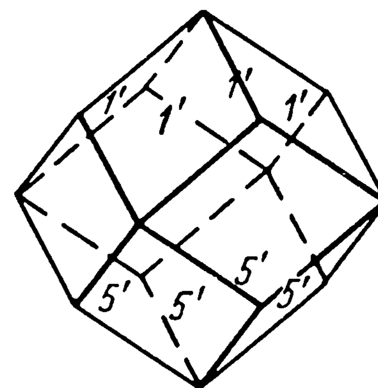

$9(\chi 1)(20\chi VII)^{g}$

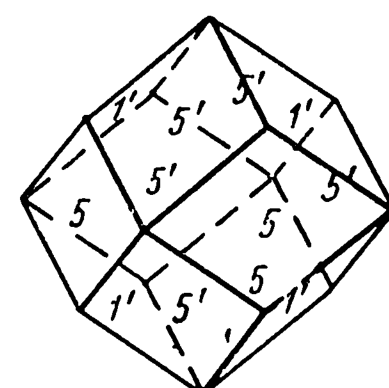

$9(\chi 2)(20\delta VII)^{g}$

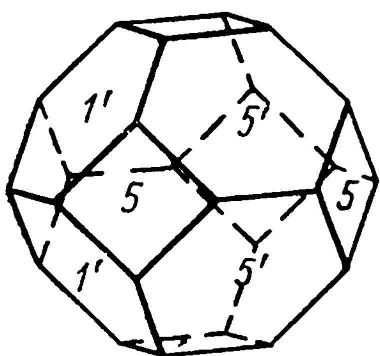

$1(\chi 2)(1 VI)$

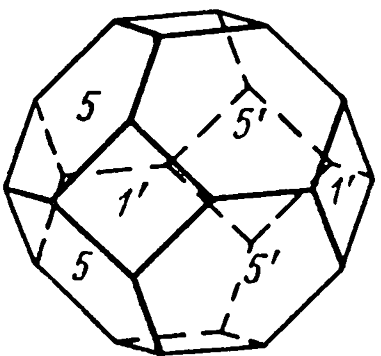

$2\chi 1(1 VI)$

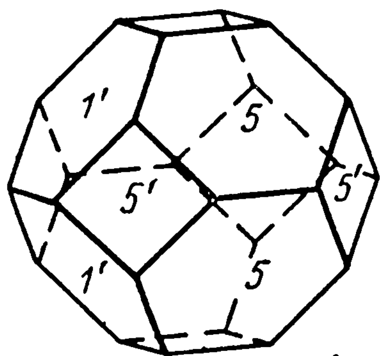

$1(\chi 2)(1 VI)'$

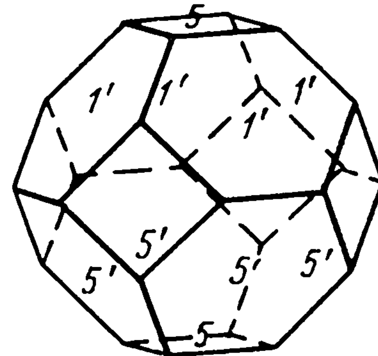

$1(\chi 2)(1 VI)^{s}_{1'5'}$

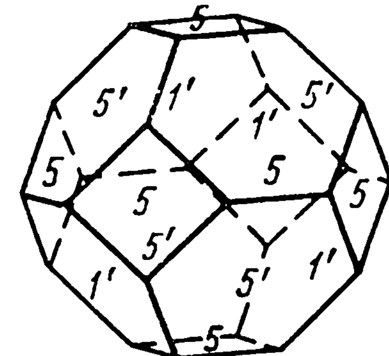

$3\chi 1(1 VI)_{55'}$

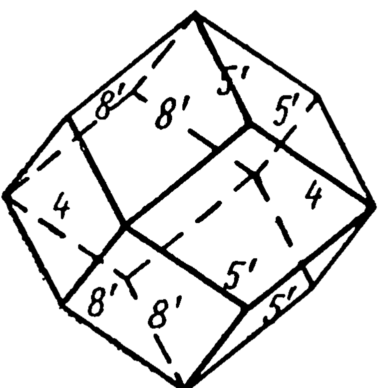

$2\chi 1(1 VII)^{c}$

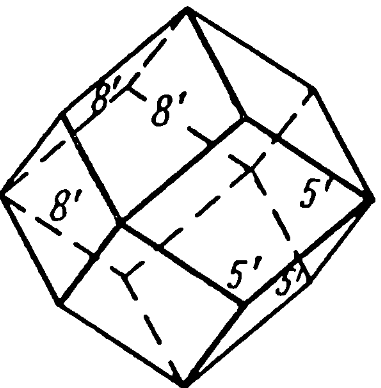

$1(\chi 2)(1 VII)^{c}$

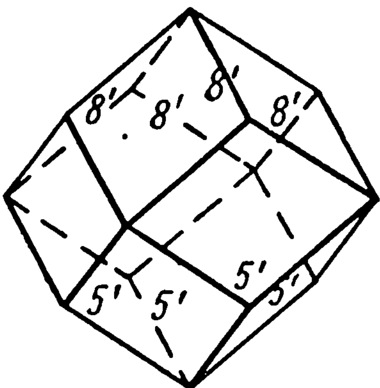

$1(\chi 2)(1 VII)^{c'}$

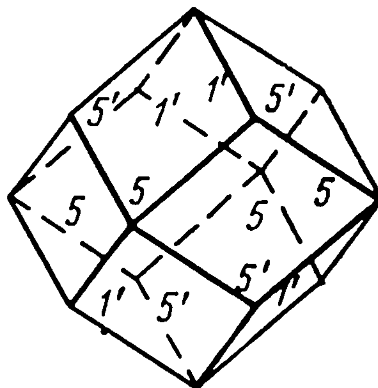

$1(\chi 2)(1 VII)^{s}_{1'5'}$

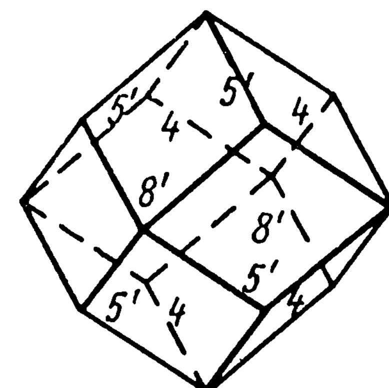

$3\chi 1(1 VII)_{1'5'}$

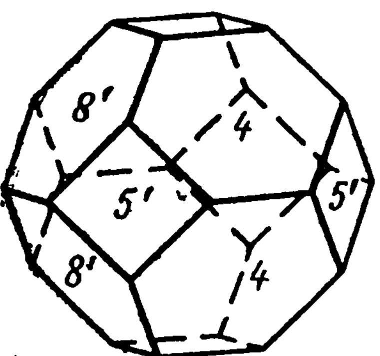

$1(\chi 2)(1 VI')^{c}_{5'8'}$

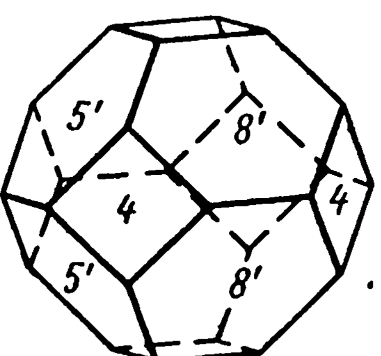

$3\chi 1(1 VI')^{s}_{5'8'}$

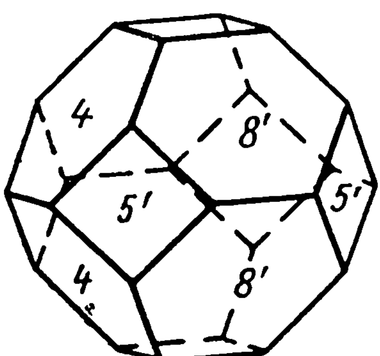

$1(\chi 2)(1 VI')^{s}_{5'8'}$

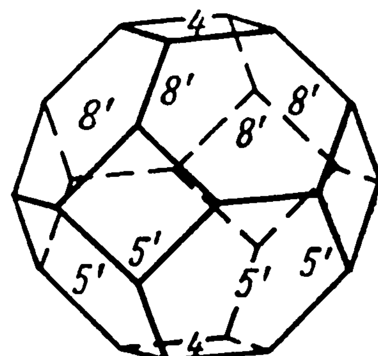

$2\chi 1(1 VI)_{1'5'}$

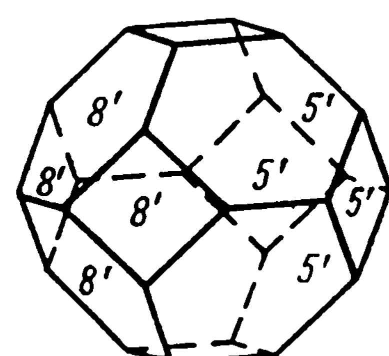

$1(\chi 2)(1 VI')^{c}_{45'}$

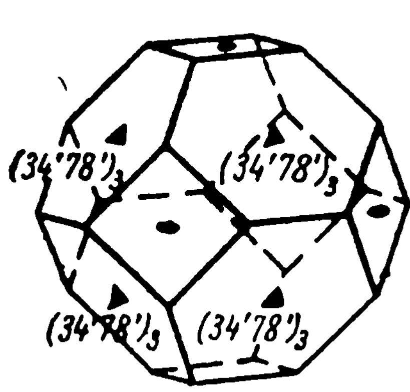

$2\chi 1(1 VII')^{c'}$

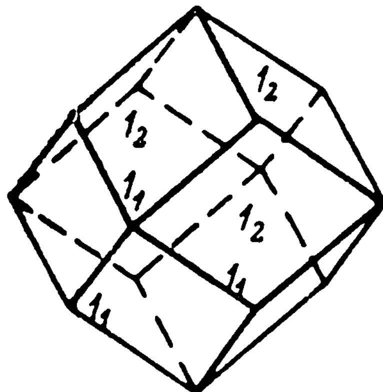

$1(\chi 2)(1 VII')^{c''}$

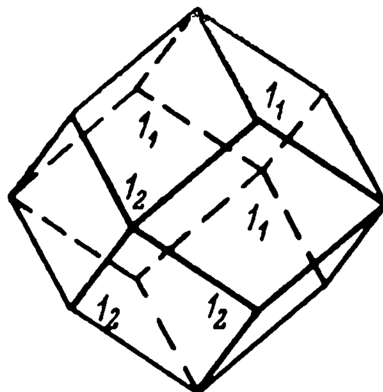

$1(\chi 2)(1 VII')^{c'''}$

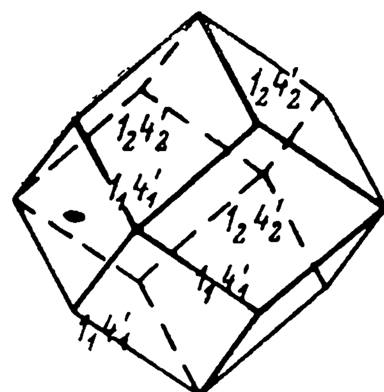

$3\chi 1(1 VII')^{s}_{5'8'}$

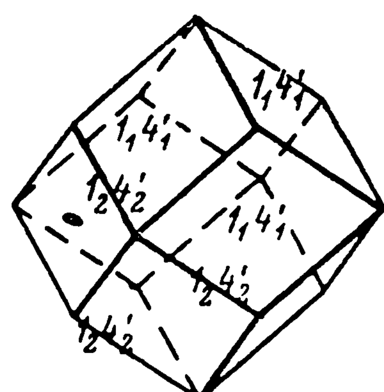

$3\chi 1(1 VII')^{s'}_{5'8'}$

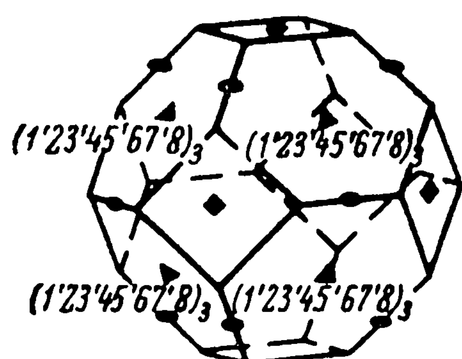

$(9)\ (20\ VII)^{g}$

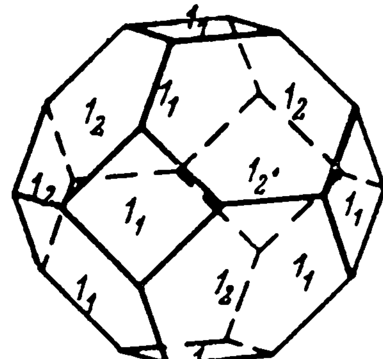

$(10)\ (1\ VI)^{s}_{r}$

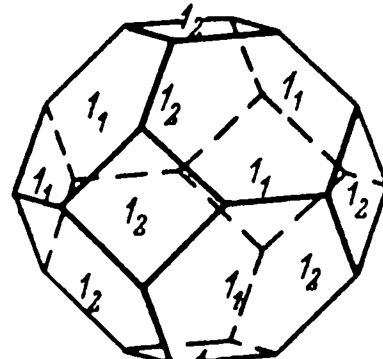

$(11)\ (1\ VI)^{s}_{l}$

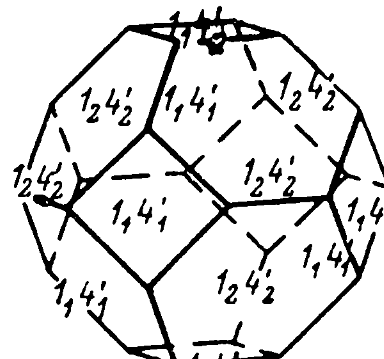

$(12)\ (3\ VI)^{s}_{r}$

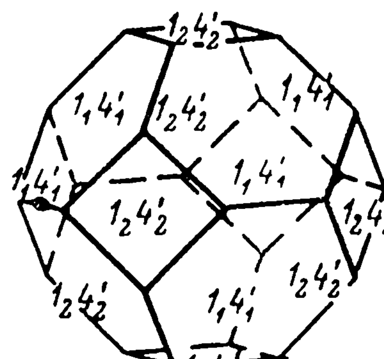

$(13)\ (3\ VI)^{s}_{l}$

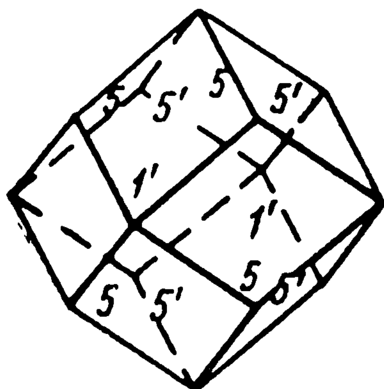

$22\chi 1\ (23\ VII)^{g}$

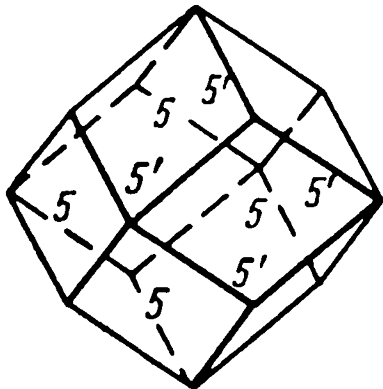

$(10)\ (1\ VII)^{c}_{r}$

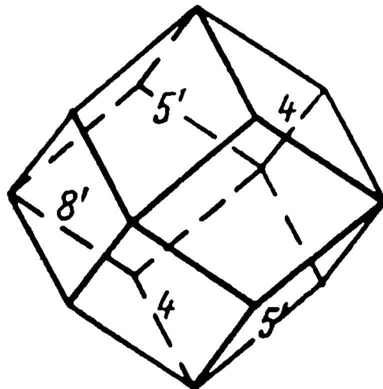

$(11)\ (1\ VII)^{c}_{l}$

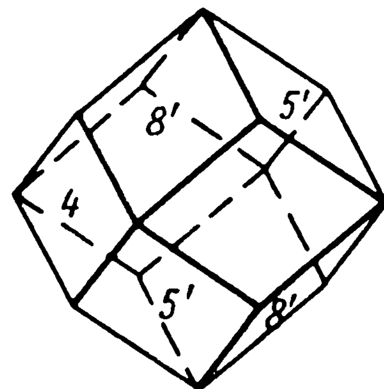

$(12)\ (3\ VII)^{c}_{r}$

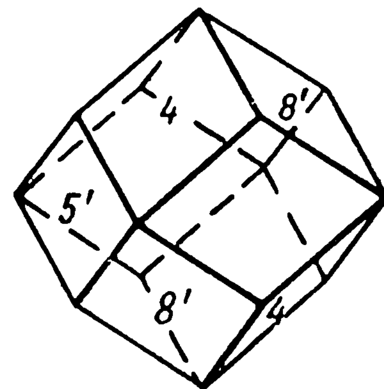

$(13)\ (3\ VII)^{c}_{l}$

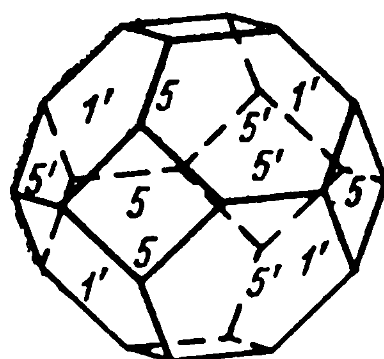

$1(\chi 2)(1VI)^{c}_{55'}$

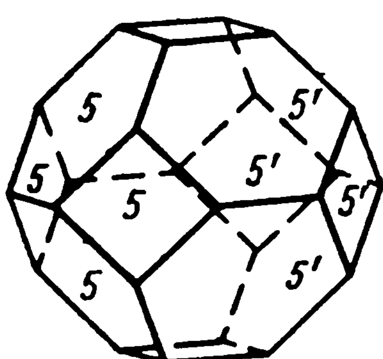

$3\chi 1\ (1VI)^{s}_{55'}$

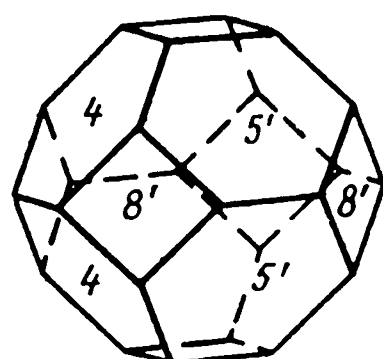

$2\chi 1\ (1VI)^{c}$

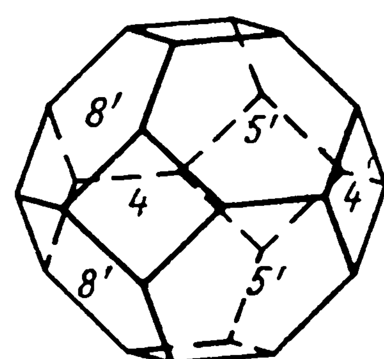

$1(\chi 2)(1VI')^{c}$

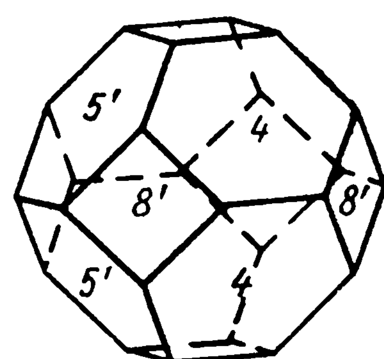

$1(\chi 2)(1VI')^{c}$

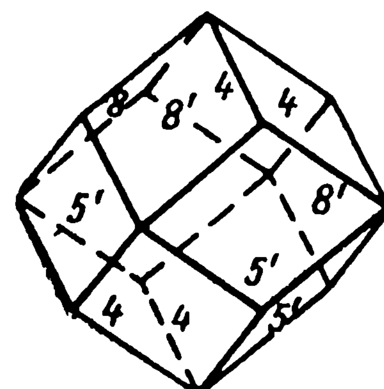

$3\chi 1\ (1VII)^{c}_{55'}$

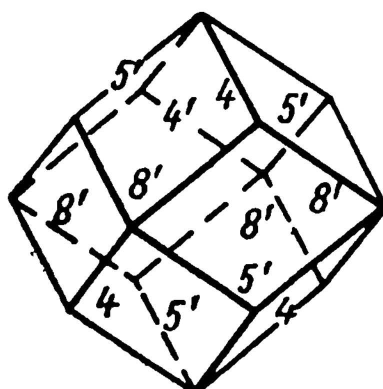

$3\chi 1\ (1VI)^{s}_{55'}$

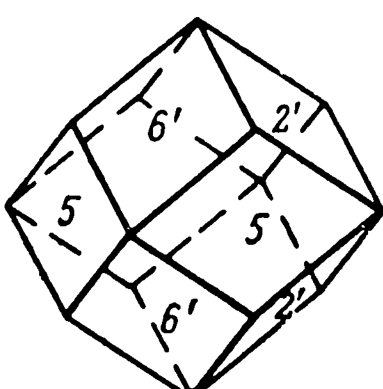

$1(\chi 2)(1VII')^{c'}$

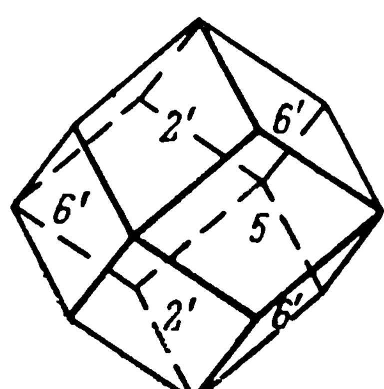

$2\chi 1\ (1VII')^{c}$

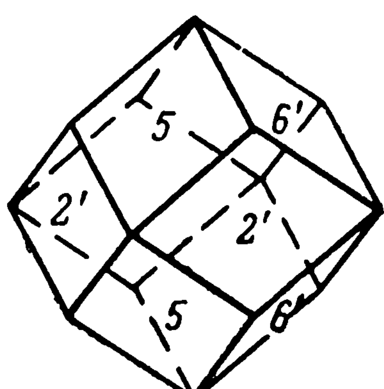

$1(\chi 2)(1VII')^{c'}$

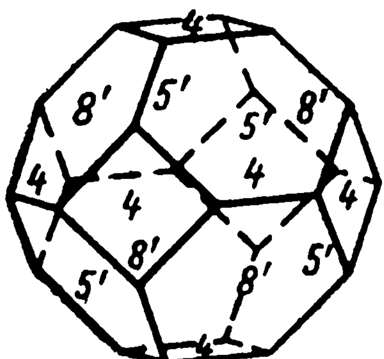

$3\chi 1\ (1\ VI')^{c}_{5'8'}$

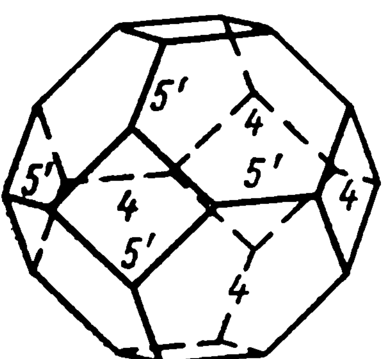

$3\chi 1 (1VI')_{45'}$

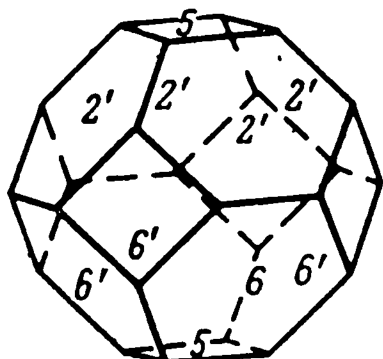

$4(1VI_{7})$

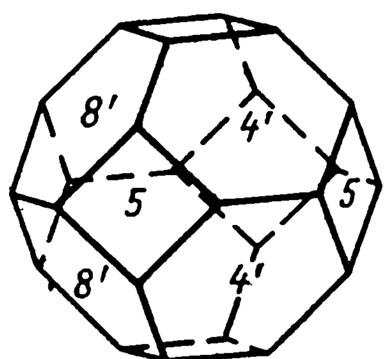

$(2)(1VI_{7})$


$(14)(1VI_{7})$


$3\chi 1\ (1\ VII')_{5'8'}$


$1(\chi 2)(1\ VII')^{s}_{45'}$


$(14)(1\ VII_{5})^{s}_{2'6'}$


$4(1\ VII_{7})^{c}$

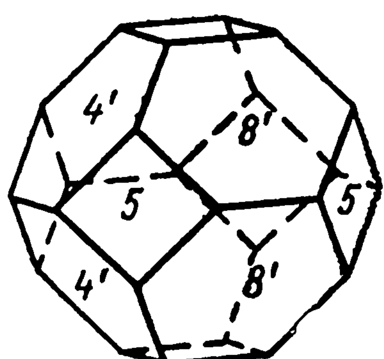
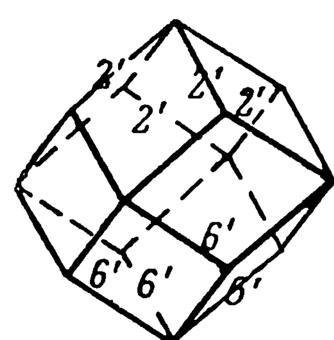
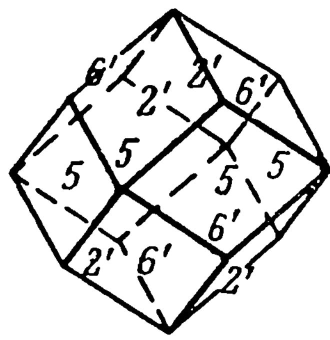
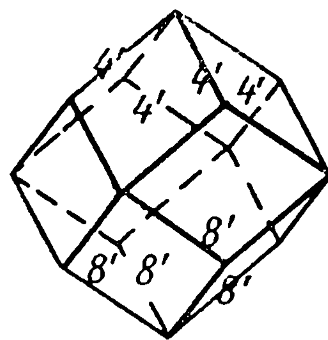
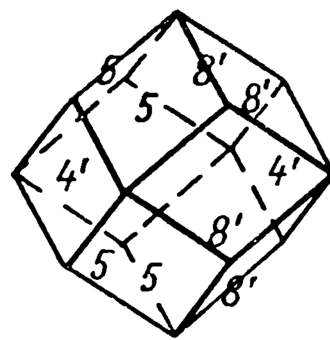

$(2)(1\ VII_{7})^{c}$

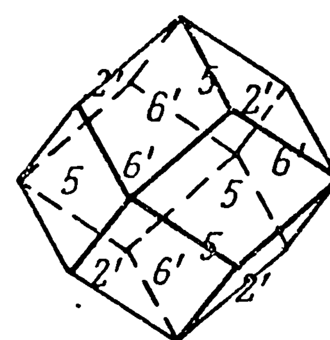
ТАБЛИЦА X

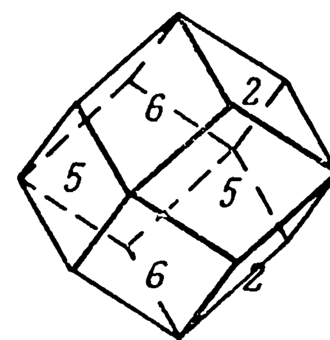

$(4)(1VI_7)^{S}_{2'6'}$

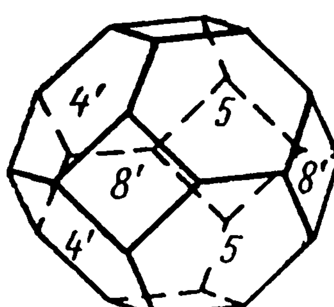

$6(1VI_7)_{2'6'}$

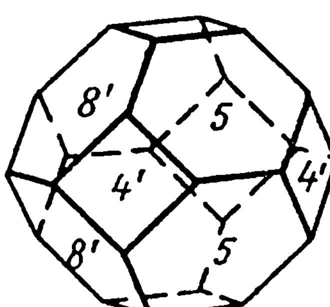

$(14)(1VI_6)^{S}_{4'8'}$

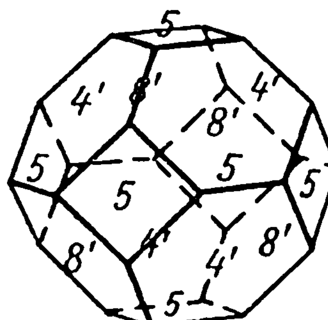

$(14)(1VI_6)^{C}_{58'}$

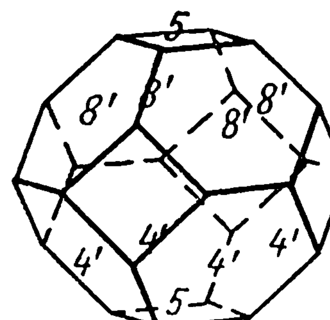

$6(1VI_7)_{56'}$

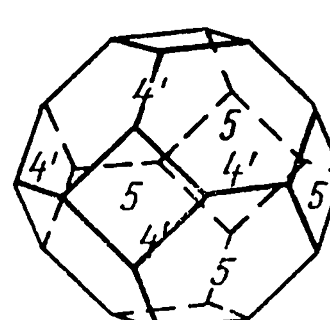

$2\varphi 1(1VI_7)$

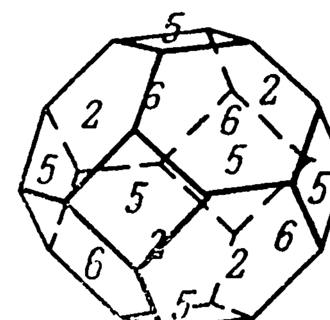

$(14)(1VII_6)^{C}$

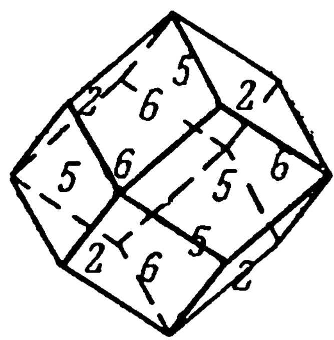

$(2)(1VII_6)^{C}$

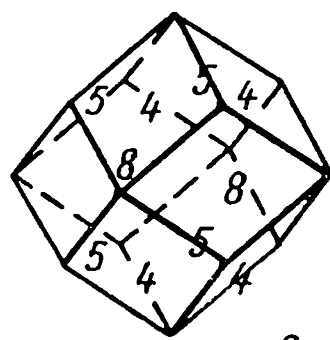

$6(1VII_6)_{4'8'}$

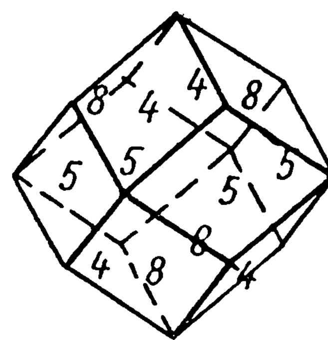

$(4)(1VII_6)^{S}_{4'8'}$

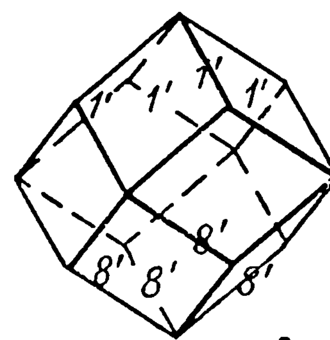

$(4)(1VII_6)^{S}_{4'5}$

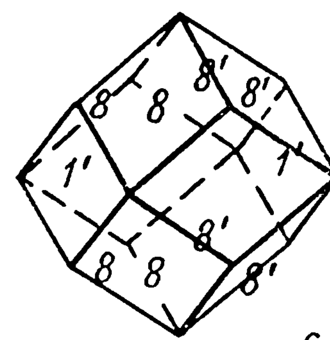

$3\varphi''1(1VII_6)_{26}$

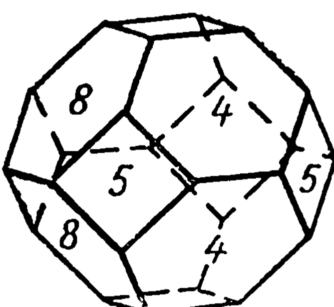

$3\varphi'2(1VI_7)_{56}$

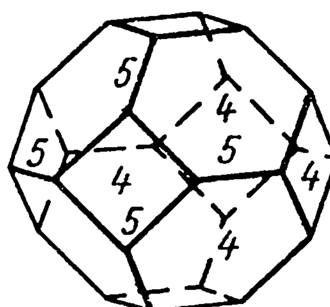

$1(\varphi 4)(1VI_6)^{C}_{45}$

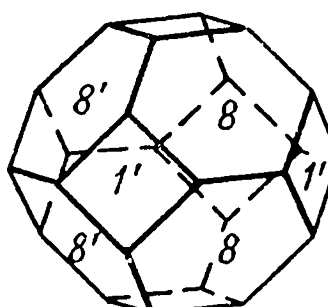

$3\varphi''1(1VI_6)_{48}$

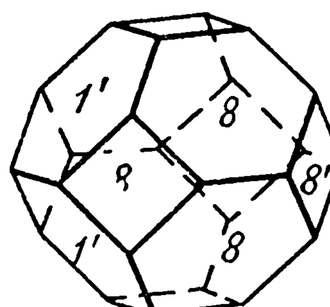

$1(\varphi 4)(1VI_6)^{S}_{1'8'}$

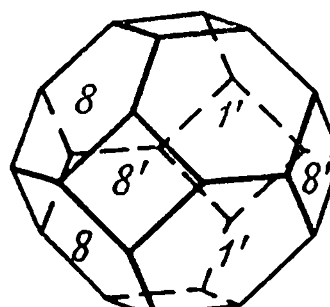

$1(\varphi 4)(1VI_6)^{C}_{88'}$

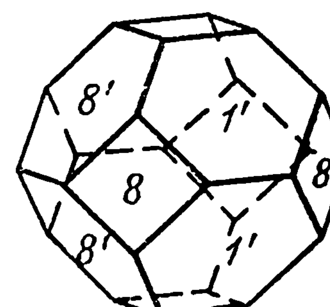

$2\varphi 1(1VII_7)^{C}$

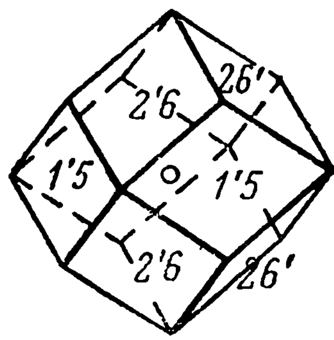

$3\varphi 3(1VII_7)^{S}_{45}$

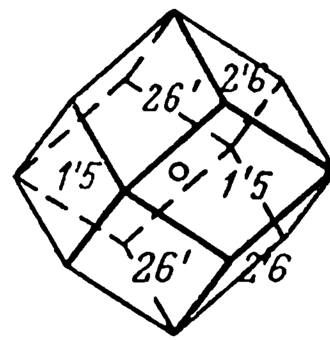

$2\varphi 5(1VII_7)^{C}$

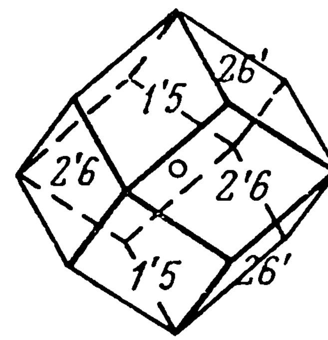

$1(\varphi 4)(1VII_7)^{C}$

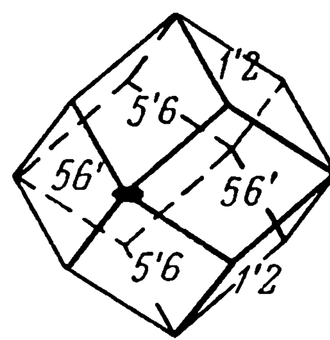

$1(\varphi 3)(1VII_7)^{C}$

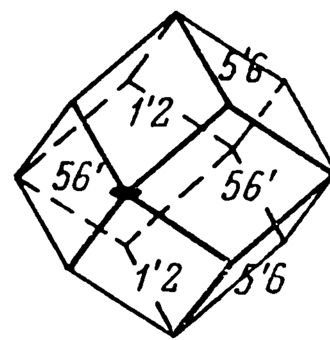

$3\varphi 1(1VII_7)^{C}$

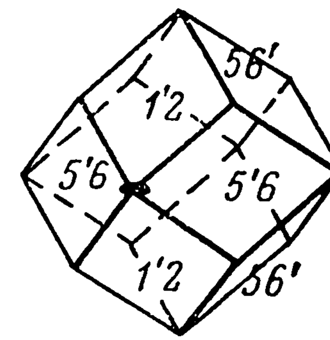

$2(\chi 6)(1\pi VI_7)$

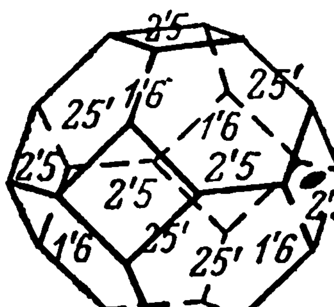

$4\chi 3(1\pi VI_7)$

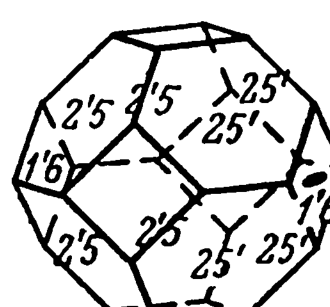

$14(\chi 2)(1\pi VI_7)$

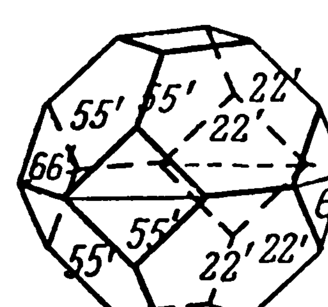

$3(\chi 3)(3VI_7)$

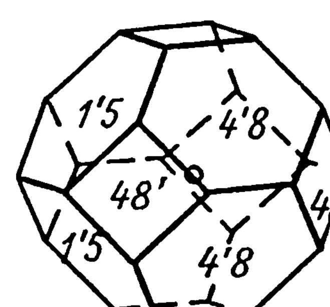

$3(\chi 4)(3VI_7)$

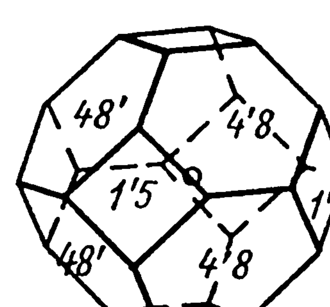

$2(\chi 5)(3VI_7)$


$7\chi 1(3VII_6)_{1'2}$


$2(\chi 6)(3VII_6)^{S}_{22'}$


$14(\chi 1)(1\chi' VII_6)^{S}_{25}$


$2(\chi 6)(1\pi VII_7)^{C}$


$4\chi 3(1\pi VII_7)^{C}$

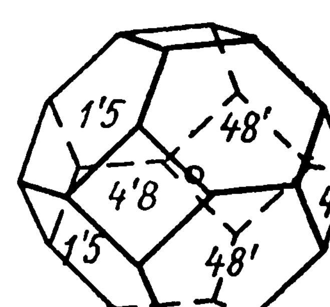
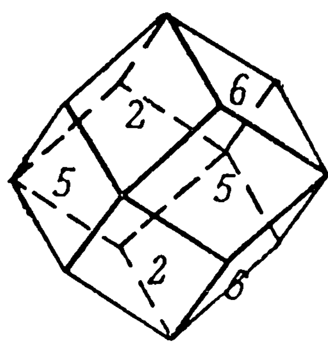
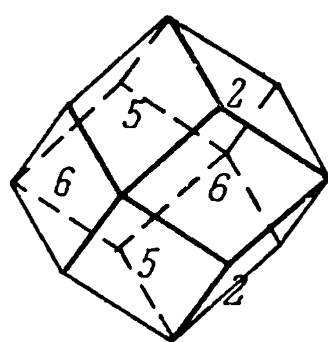
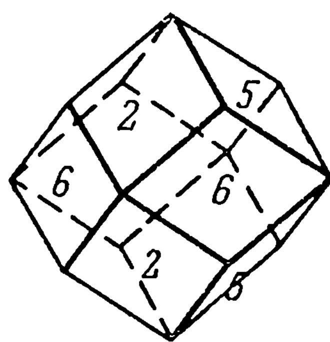
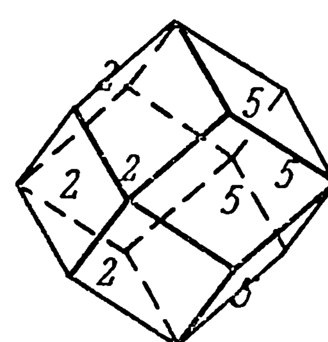

$14(\chi 2)(1\pi VII_7)^{C}$

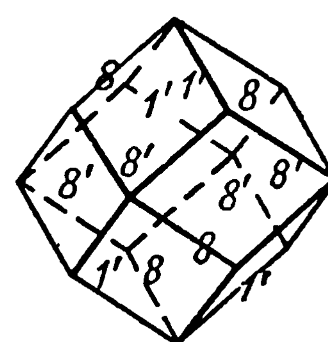
ТАБЛИЦА X (*продолжение*)

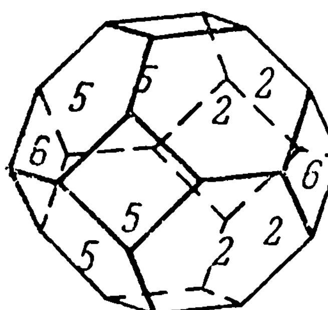

$2\varphi 4(1VI_7)$

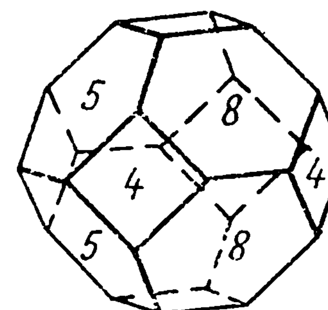

$1(\varphi 3)(1VI_7)$

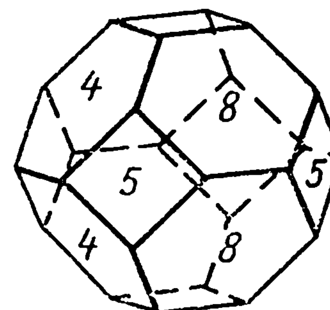

$1(\varphi 4)(1VI_7)$

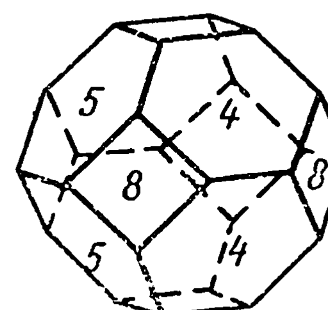

$3\varphi 3(1VI_7)^S_{25}$

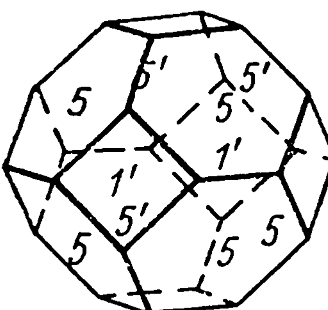

$3\varphi 3(1VI)$

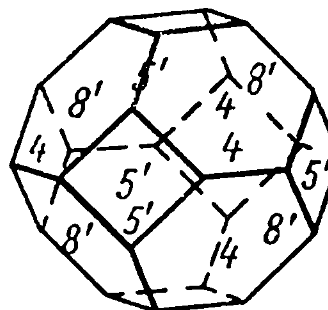

$1(\varphi 4)(1VII_6)_{25}$

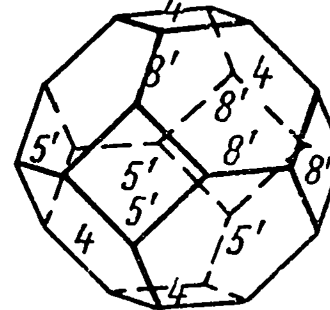

$1(\varphi 4)(1VII_7)^C$

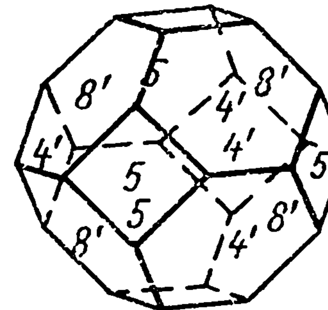

$2\varphi 4(1VII_7)^C$

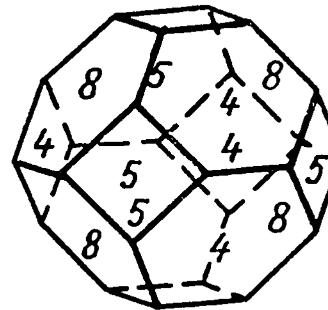

$1(\varphi 3)(1VII_7)^C$

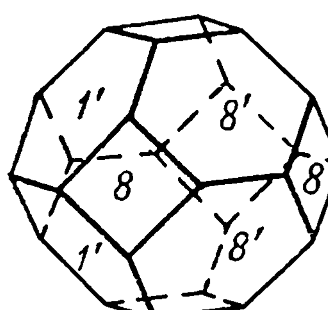

$1(\chi 2)(1VII)^S_{55'}$

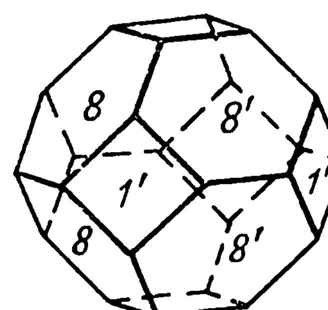

$2\chi 1(1VII')^C_{45'}$

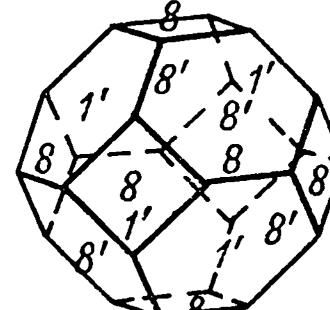

$1(\chi 2)(1VII')^C_{5'8'}$

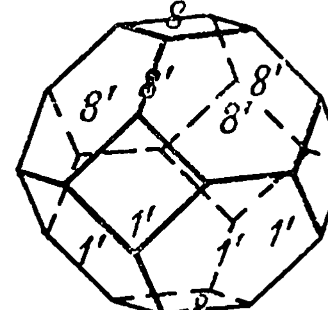

$6(1VII_6)^C_{4'5}$

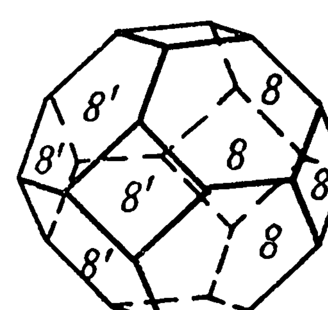

$3\varphi' 2(1VII_7)^C_{45}$

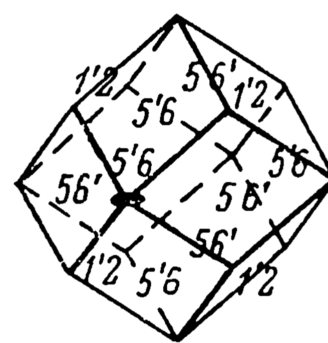

$1(\varphi 4)(1VII_7)^{C'}$

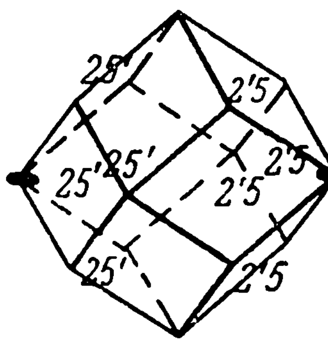

$1(\varphi 4)(1VII_7)^{C''}$

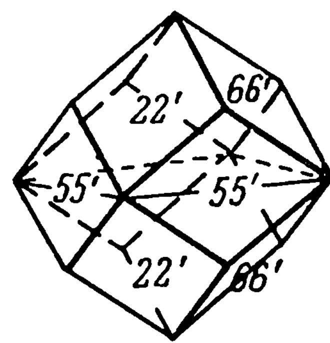

$3\varphi' 2(1VII_7)_{1'8'}$

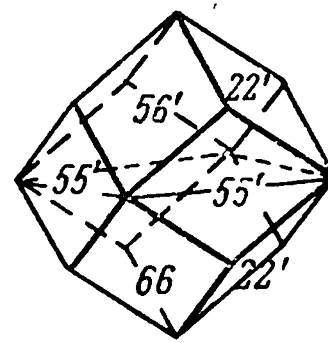

$3\varphi 3(1VII_7)^S_{1'8'}$

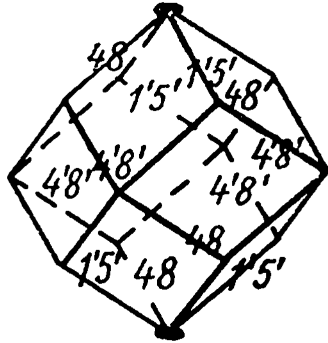

$3\varphi 3(1VII_7)^S_{88'}$

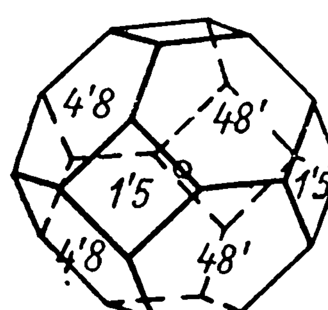

$5(\chi 2)(3'VI_7)_{55'}$

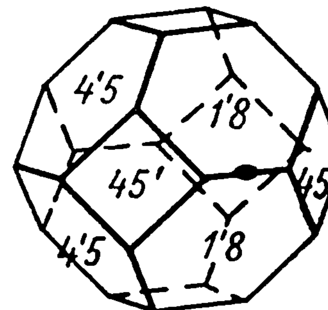

$5\chi 3(3VI_7)^S_{22'}$

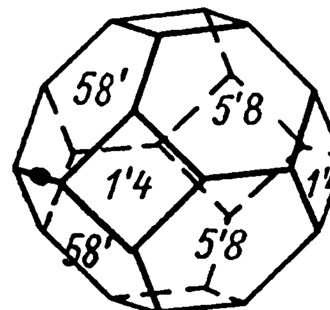

$2(\chi 4)(1\chi' VI_7)$

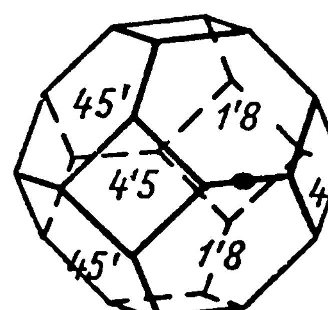

$4\chi 1(1\chi' VI_7)$

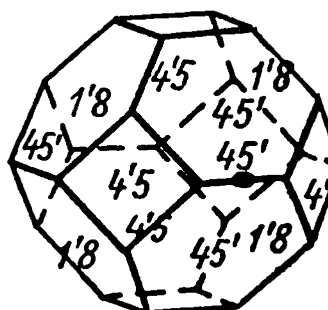

$7\chi 1(3VI_7)_{1'4}$

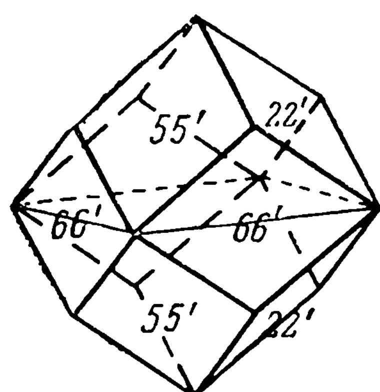

$2(\chi 6)(1\pi VII_7)^C$

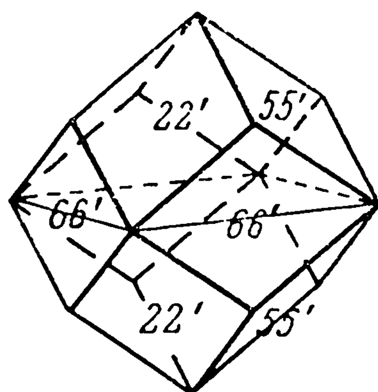

$2(\chi 5)(3VII'_7)^C$

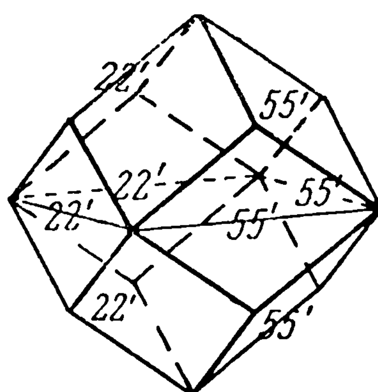

$3(\chi 4)(3VII'_7)^C$

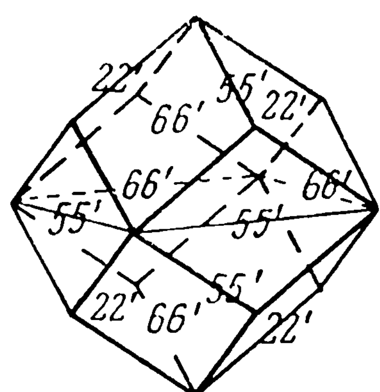

$3(\chi 4)(3VII'_7)^C$

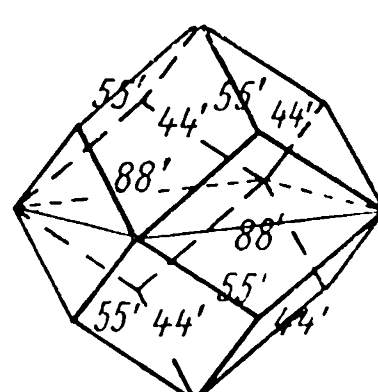

$5(\chi 2)(3VII'_7)^C_{44'}$

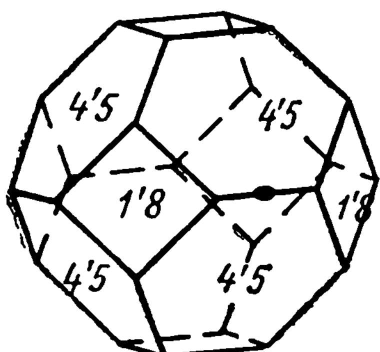

$2(\chi 2)(1\chi' VI_7)$

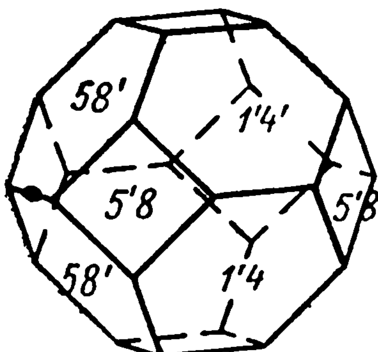

$14(\chi 1)(1\chi' VI_7)$

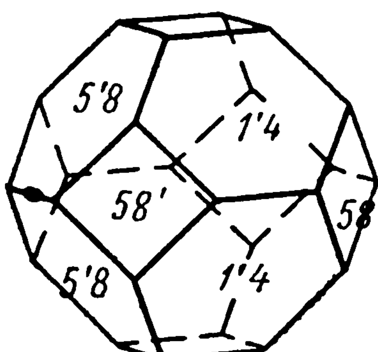

$4(\chi 2)(1\chi' VI_7)^{S}_{25}$

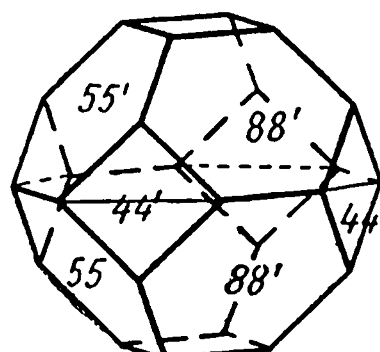

$6\chi 1(1\chi' VI_7)_{56}$

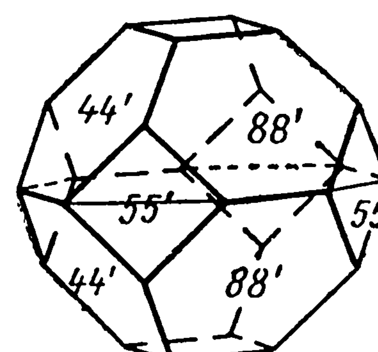

$14(\chi 1)(1\chi' VI_6)^{C}_{45}$

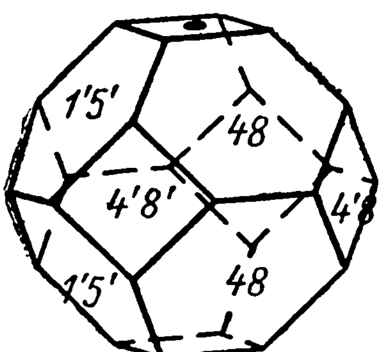

$2(\chi 5)(3\,VII'_7)^{C}$

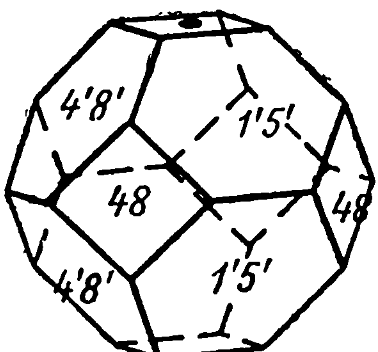

$3(\chi 3)(3\,VII'_7)^{C}$

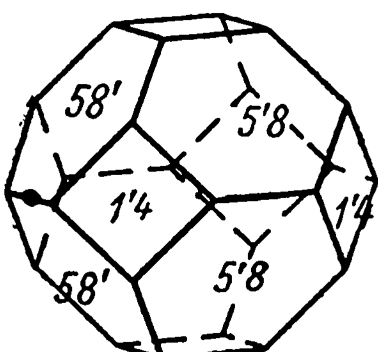

$3(\chi 3)(3\,VII'_7)^{C}$

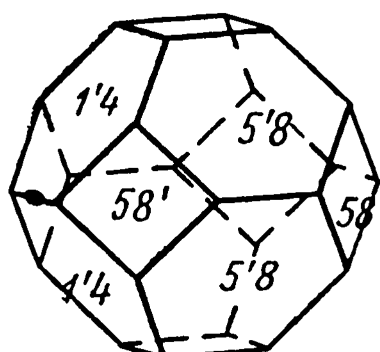

$14(\chi 1)(1\chi' VII_7)^{C}$

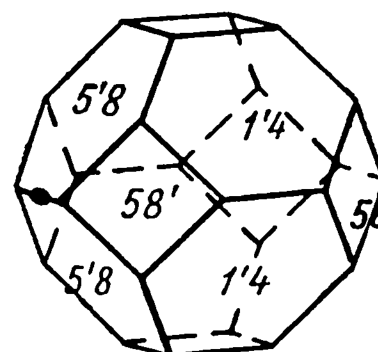

$2(\chi 4)(1\chi' VII_7)^{C}$

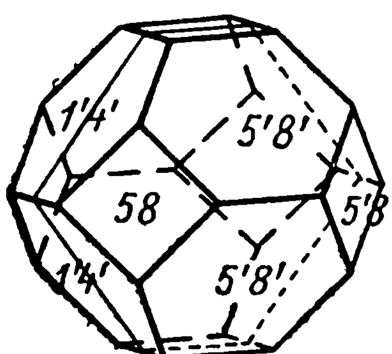

$2(\chi 5)(3\,VII_7)^{C}$

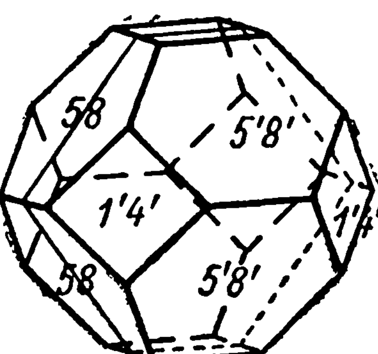

$3(\chi 3)(3\,VII_7)^{C}$

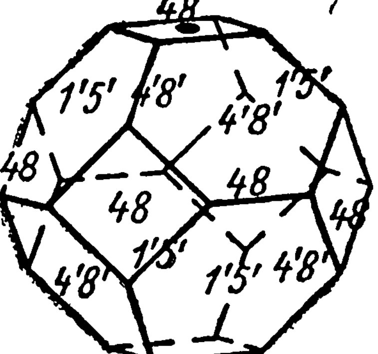

$3(\chi 3)(3\,VII'_7)^{C}$

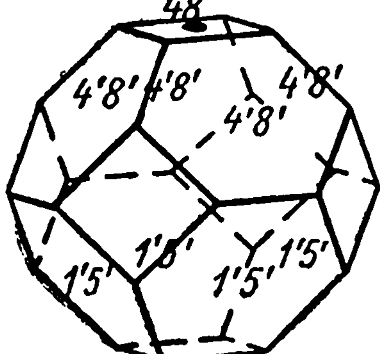

$3(\chi 3)(3\,VII'_7)^{C}$

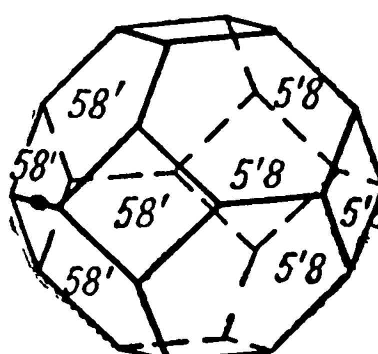

$3(\chi 4)(3\,VII'_7)^{C}$

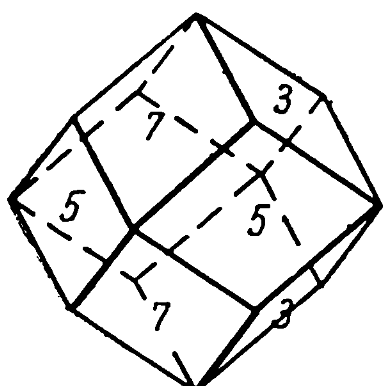

$2(\chi 2)(1\chi' VII'_7)^{C}$

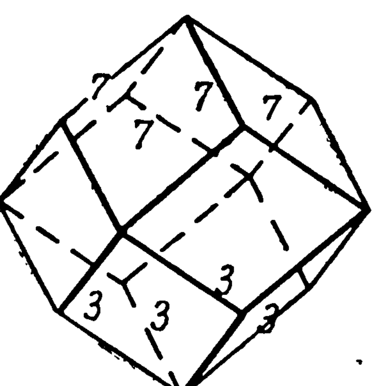

$14(\chi 1)(1\chi' VII'_7)^{C}$

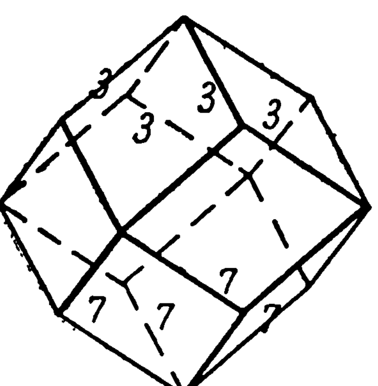

$5(\chi 2)(3\,VII_7)_{1'4'}$

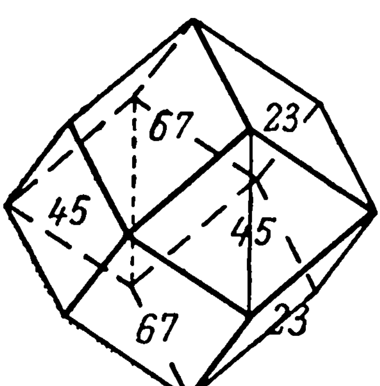

$5\chi 3(3\,VII_7)^{S}_{1'4'}$

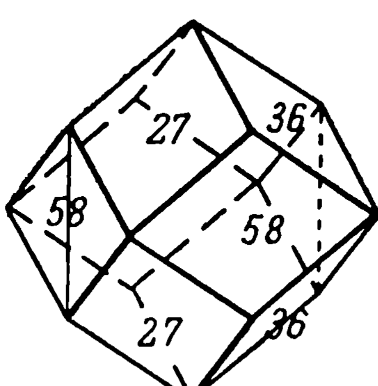

$5\chi 3(3\,VII'_7)^{S}_{55'}$

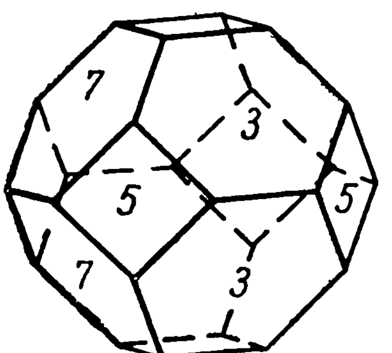

$(6)(1\,VI)$

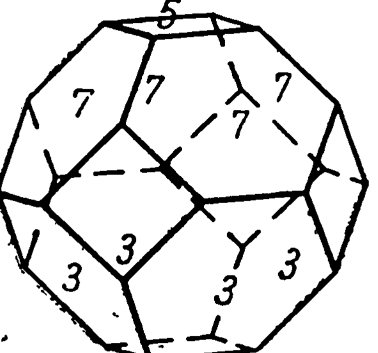

$(15)(1\,VI)^{S}_{r}$

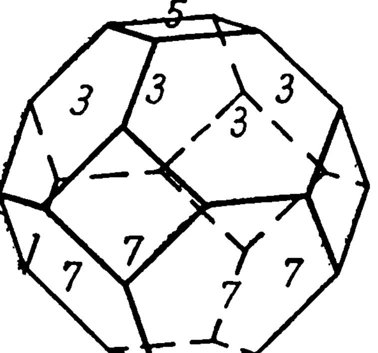

$(16)(1\,VI)^{S}_{l}$

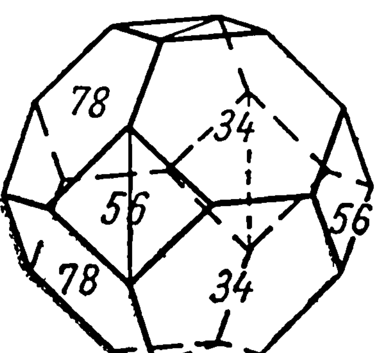

$6(\varphi 2)(1\chi' VI')$

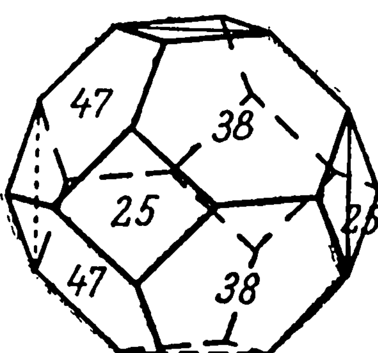

$6(\varphi 3)(1\chi' VI')$

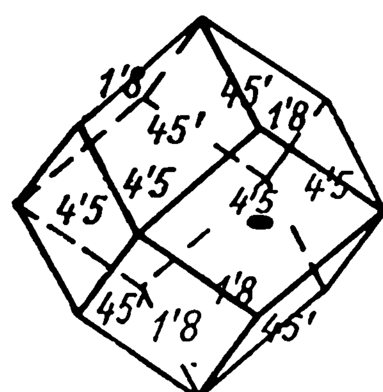

$(6)(1\,VII)$


$(15)(1\,VII)^{S}_{r}$

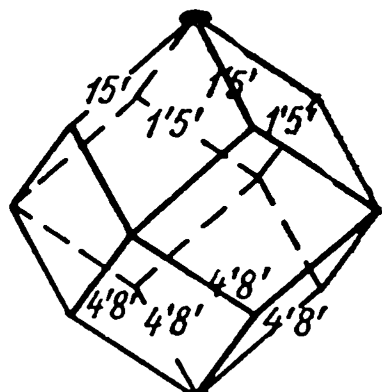

$(16)(1\,VI)^{S}_{l}$


$6(\varphi 2)(1\chi' VII)^{C}$

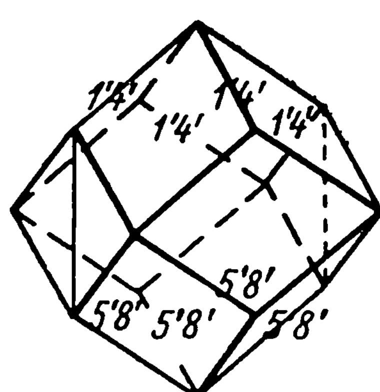

$6(\varphi 3)(1\chi' VII)^{C}$



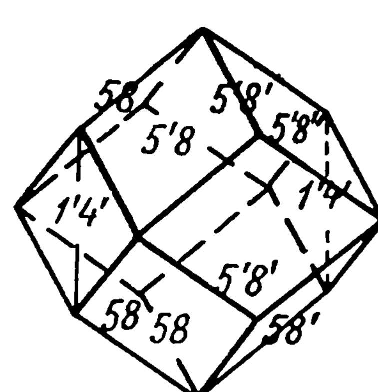
$7\chi 1(3VI_6')_{1'4}$



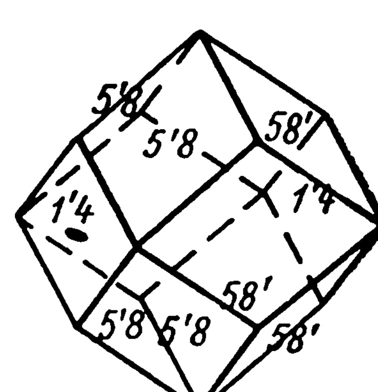
$2(\chi 6)(3VI_6)^S_{1'4'}$



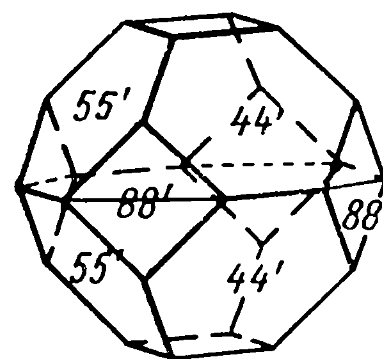
$14(\chi 1)(1\chi' VI_6')^S_{1'5'}$



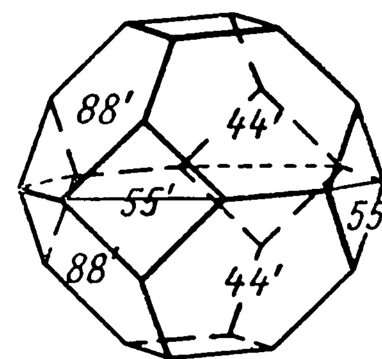
$14(\chi 1)(1\chi' VI_6')_{55'}$



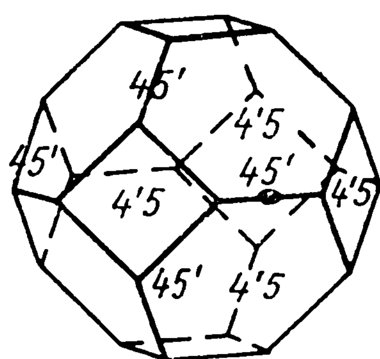
$2(\chi 6)(3VI_6')_{55'}$



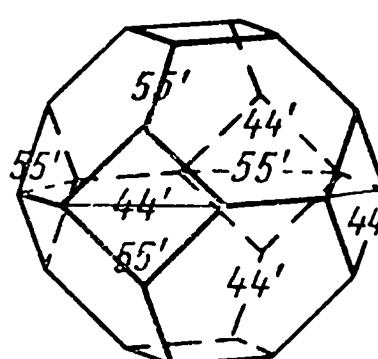
$2(\chi 2)(1\chi' VII_7)^C$



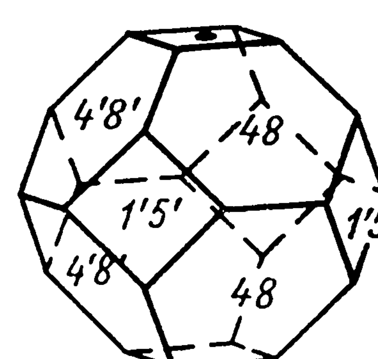
$4\chi 1(1\chi' VII_7)^C$



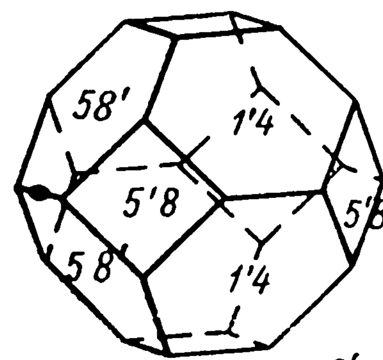
$5\chi 3(3VII_7')^S$



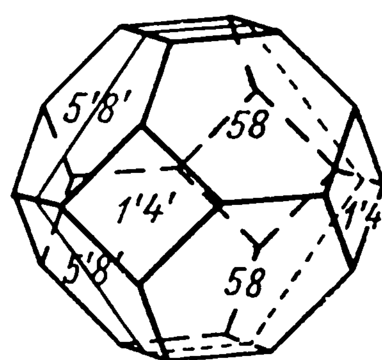
$4(\chi 2)(1\chi' VII_7)^S$



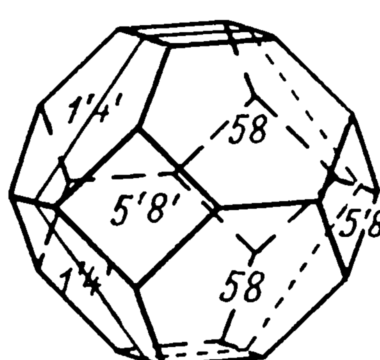
$3(\chi 4)(3VII_7)^C$



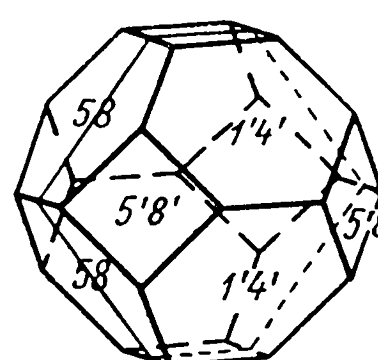
$3(\chi 4)(3VII_7')^{C'}$



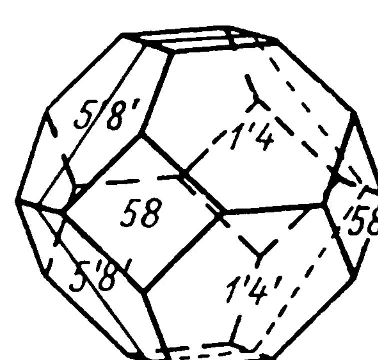
$2(\chi 4)(1\chi' VII_7')^C$



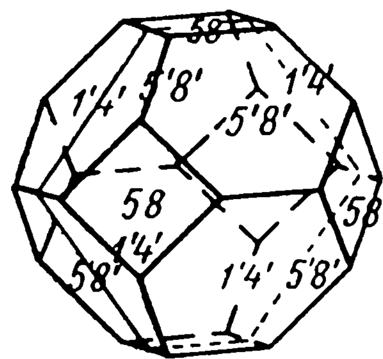
$14(\chi 1)(1\chi' VII_7')^C$



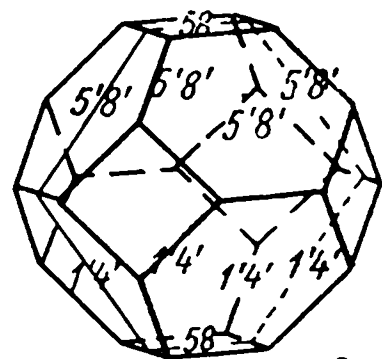
$2(\chi 2)(1\chi' VII_7')^C$



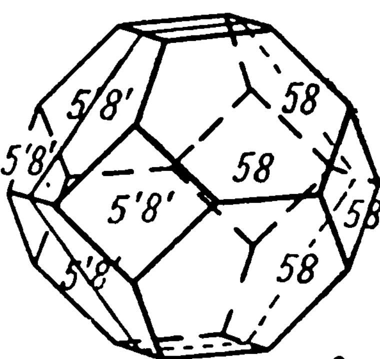
$4\chi 1(1\chi' VII_7')^C$



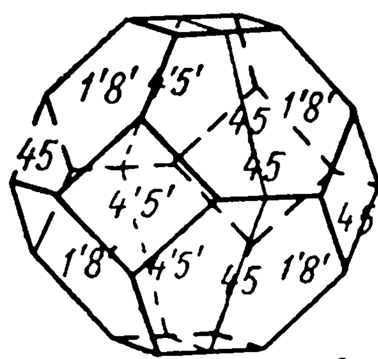
$2(\chi 2)(1\chi' VII_7')_{1'5'}$



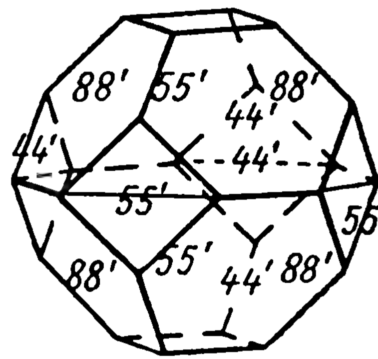
$4(\chi 2)(1\chi' VII_7')^S_{1'5'}$



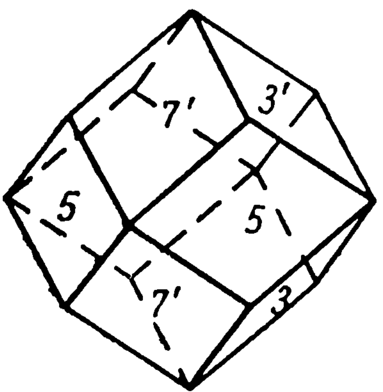
$4(\chi 2)(1\chi' VII_7')^S_{55''}$



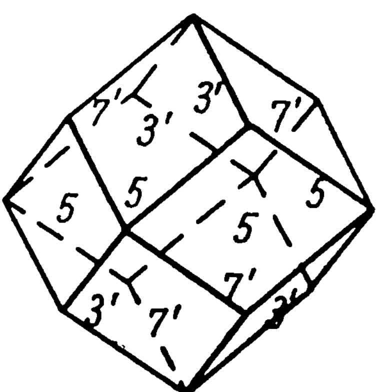
$6\chi 1(1\chi' VII_7')^C_{44'}$



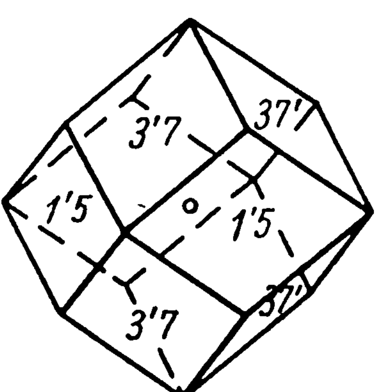
$6\chi 1(1\chi' VII_7)^C_{45}$



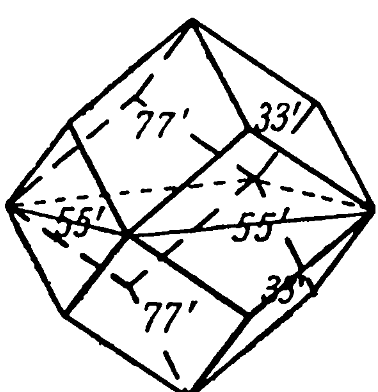
$2\pi(1VI)$



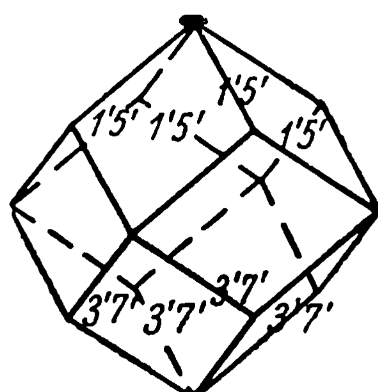
$3\pi(1VI)_{3'7'}$



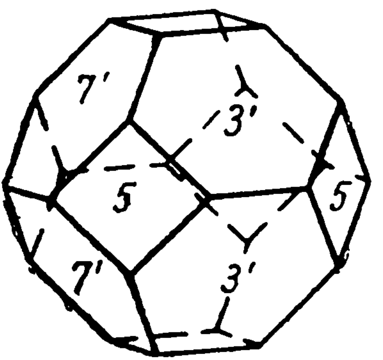
$6(\chi 2)(1\pi VI)$



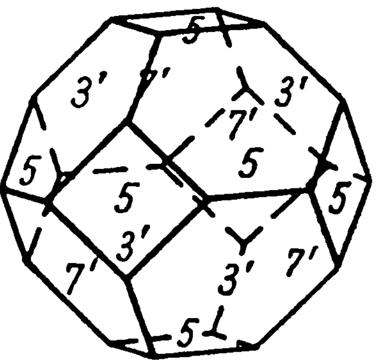
$6(\chi 1)(1\chi' VI)$



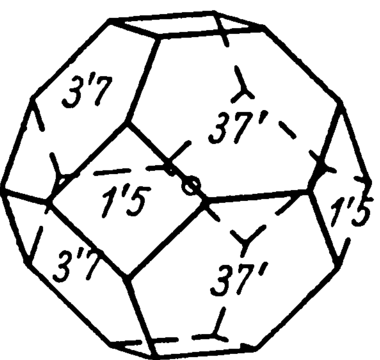
$6(\chi 2)(3VI)^S_{1'3'}$



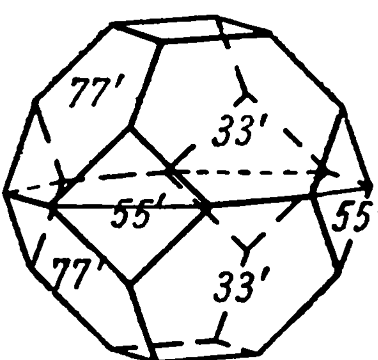
$2\pi(1VII)^C$



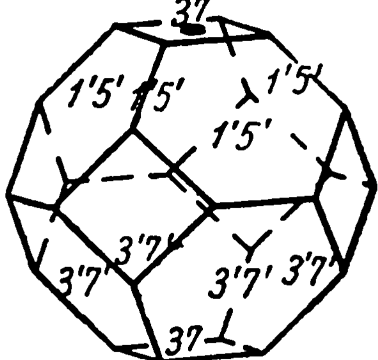
$3\pi(1VII)_{3'7'}$



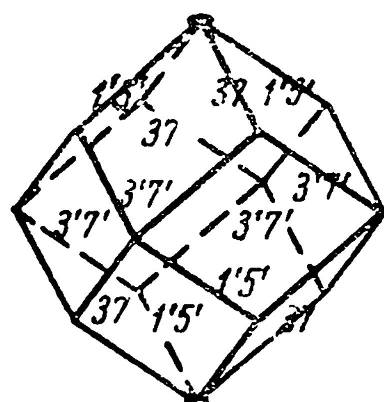
$6(\chi 2)(1\pi VII)^C$

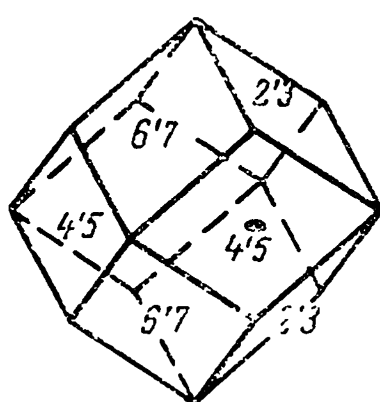


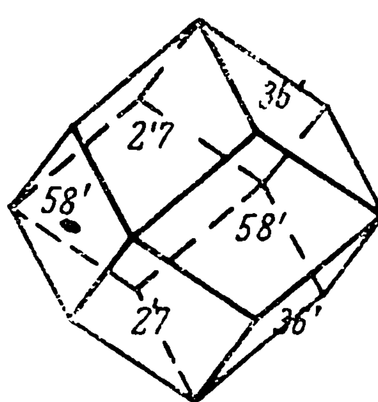
$6(\chi 1)(1\chi' VI)^C$

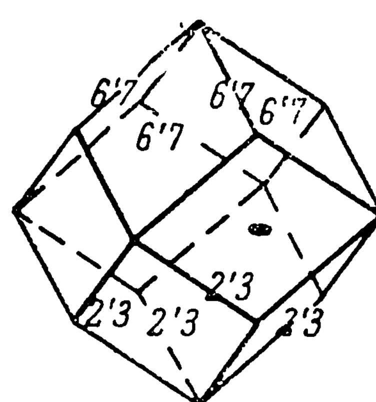


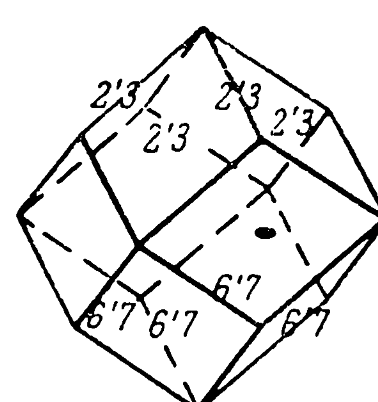
$6(\chi 2)(3VI)^S_{1'3'}$

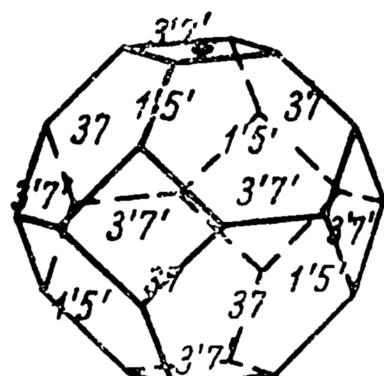

17 (χ1)(3 VI)$_{1'3}$

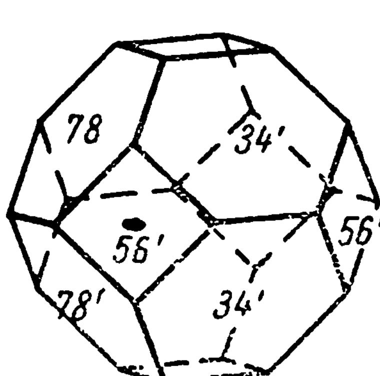

(8)(3 VI')

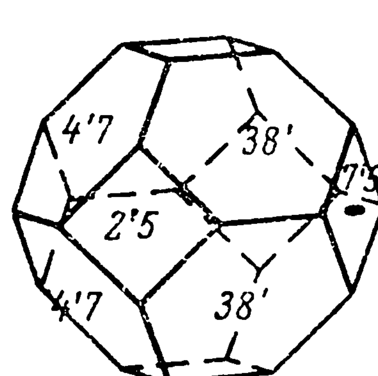

(18)(3 VI')

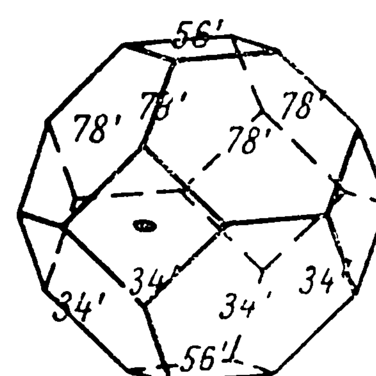

(19)(3 VI')$^{s}_{r}$

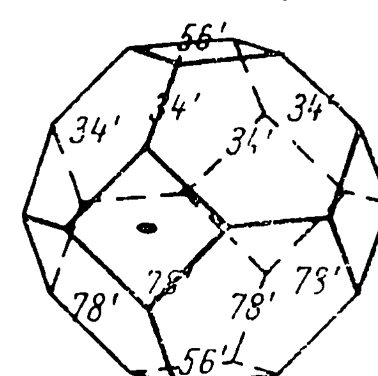

(20)(3 VI')$^{s}_{l}$

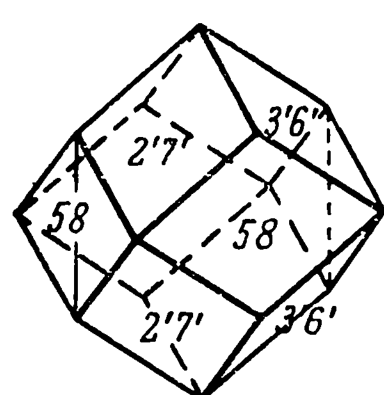

17 (χ1)(3 VI)$_{1'3}$

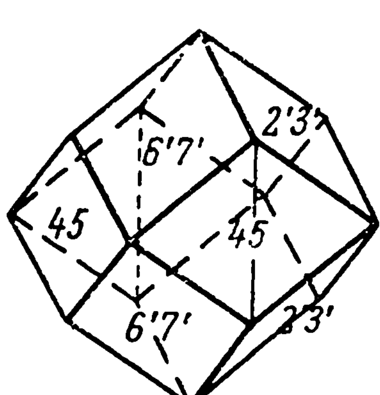

(8)(3 VII)^{c}

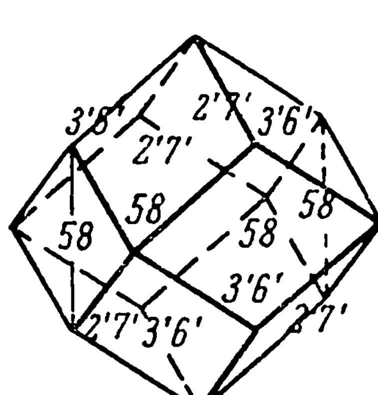

(18)(3 VII)^{c}

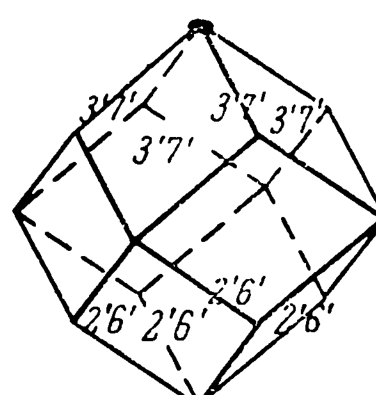

(19)(3 VII')$^{s}_{r}$

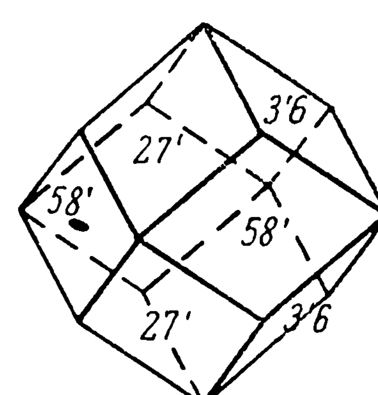

(20)(3 VII')$^{s}_{l}$

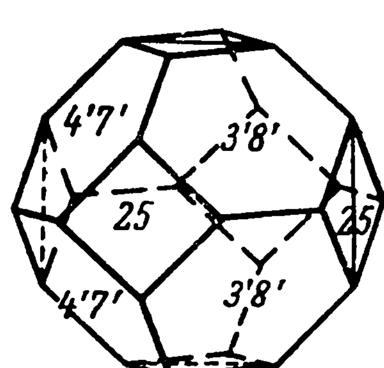

2(δ1)(1χ'VI')

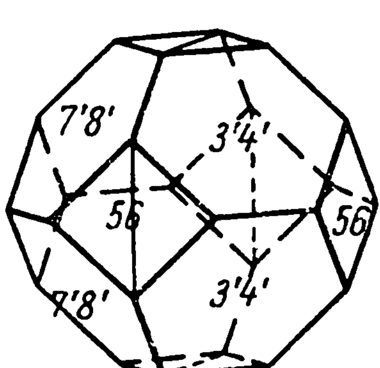

4δ(1χ'VI')

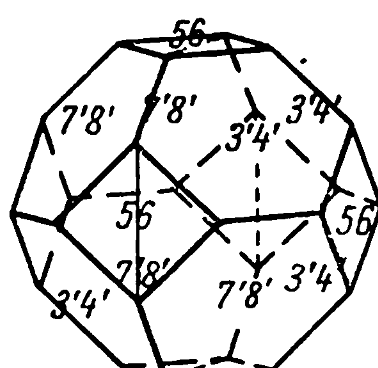

6δ(1χ'VI')$_{2'3'}$

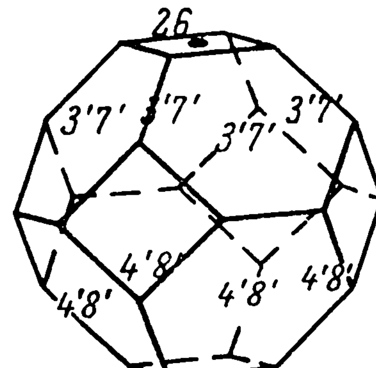

5δ1 (3 VI)$^{s}_{2'3'}$

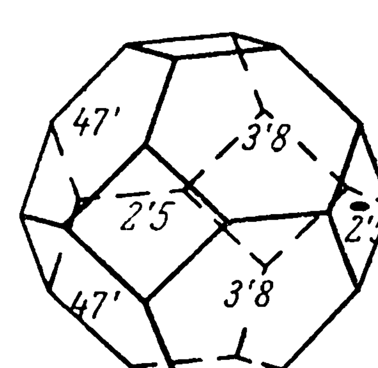

5δ3 (3 VI')

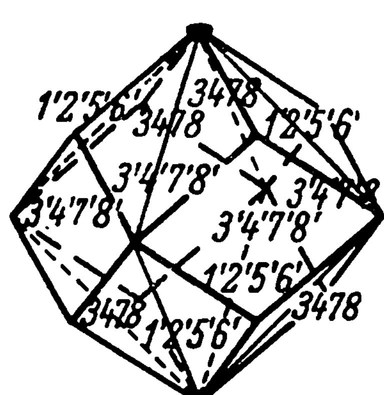

2(δ1)(1χ'VII)^{c}

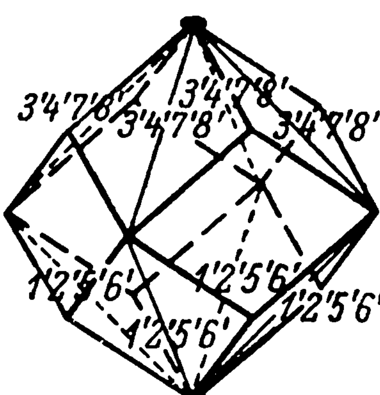

4δ(1χ'VII)^{c}

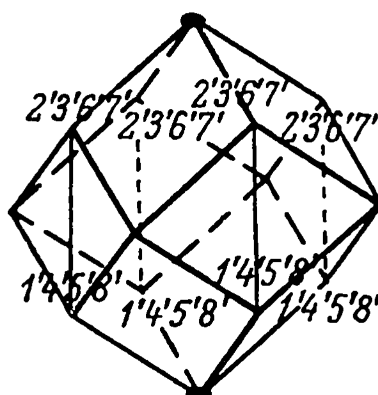

6δ(1χ'VII)

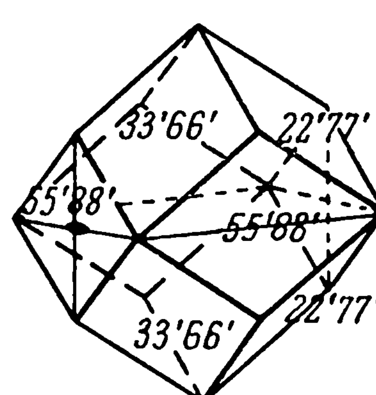

5δ1 (3 VII)$^{s}_{3'4'}$

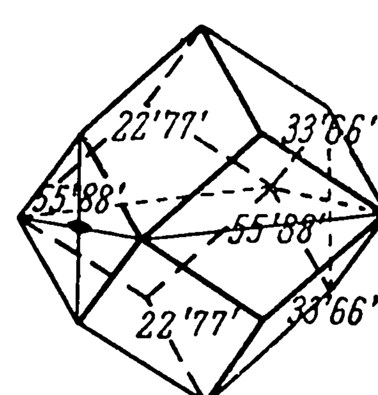

5δ3 (3 VII)^{c}

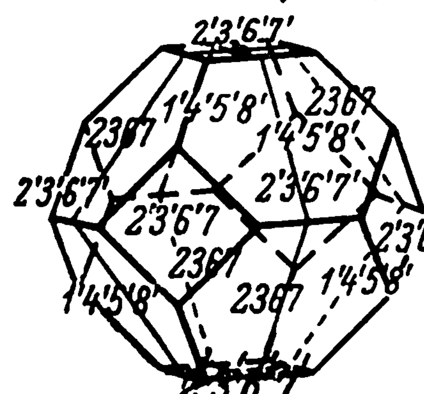

21(χ2)(3φ''VI)$_{1'3}$

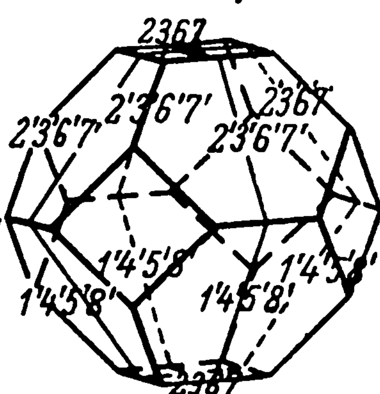

18(χ2)(3φ VI)$^{s}_{1'3'}$

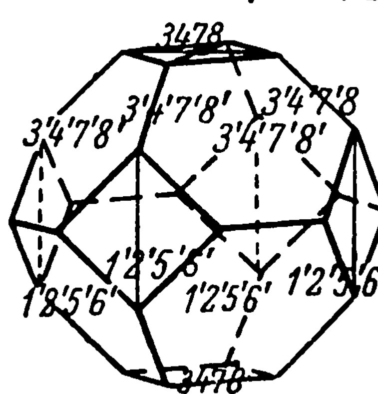

18(χ4)(3φ'VI)$^{s}_{1'2'}$

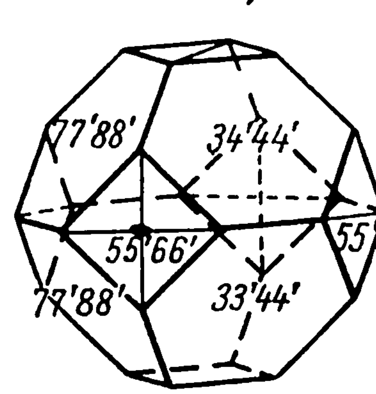

8(χ1)(3φ'VI')

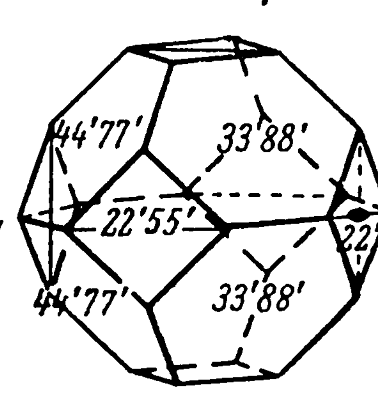

18(χ1)(3φ'VI')

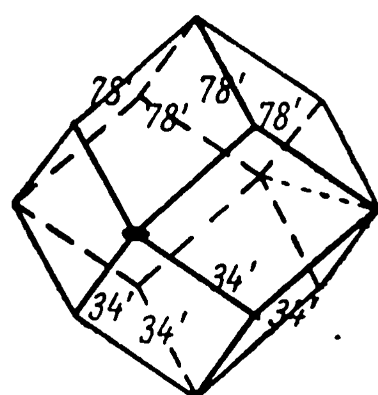

21(χ2)(3φ''VII)$_{1'2}$

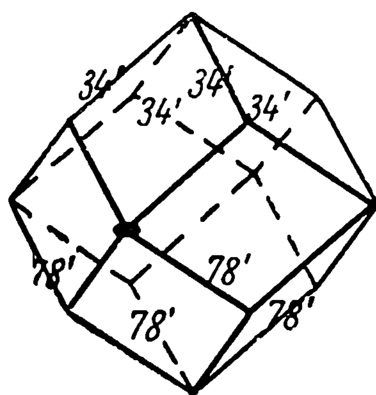

18(χ2)(3φ''VII)$^{s}_{1'2'}$

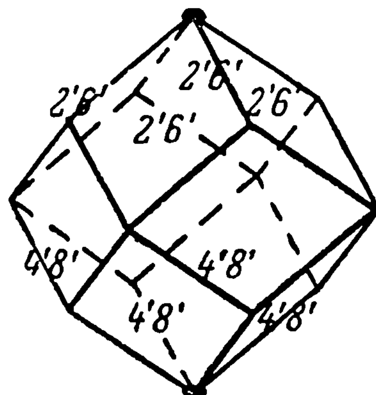

18(χ4)(3φ'VII)$^{s}_{1'3'}$

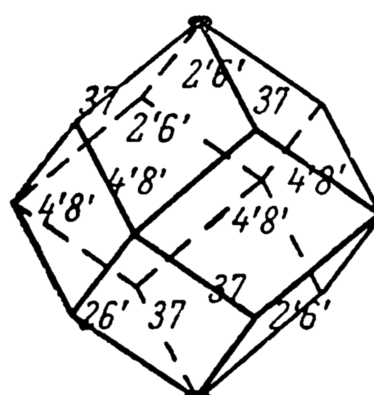

8(χ1)(3φ'VII)^{c}

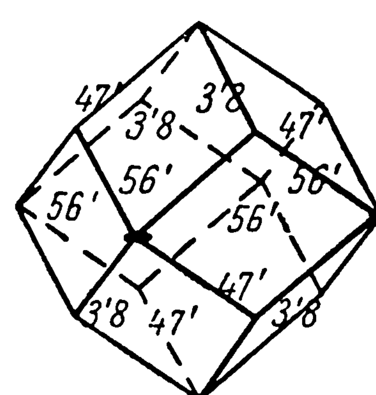

18(χ1)(3φ'VII)^{c}

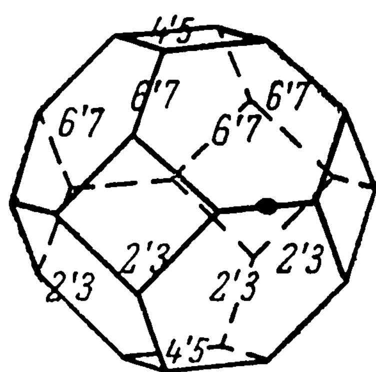

(23)(3 VI)$^{S}_{r}$

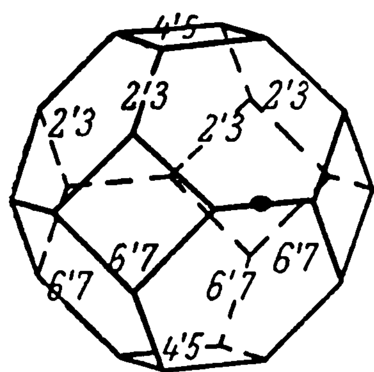

(24)(3VI)$^{S}_{l}$

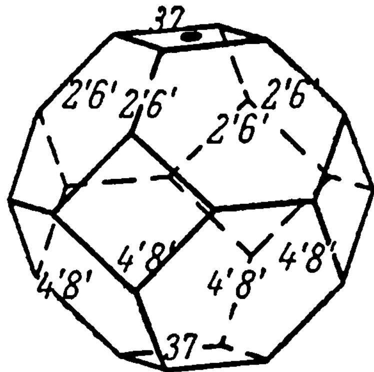

(18)(3VI)$^{S}_{2'4'}$

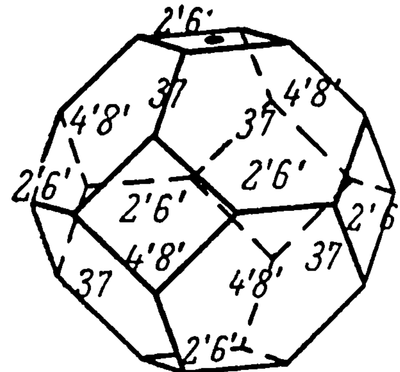

(21)(3VI)$_{2'3}$

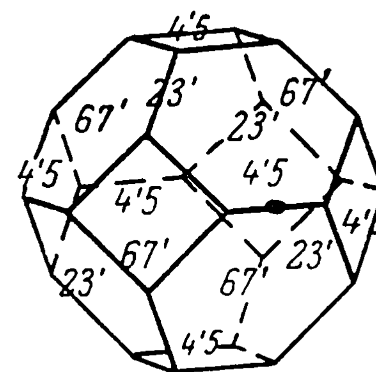

5(δ1)(3VI)$_{3'4}$

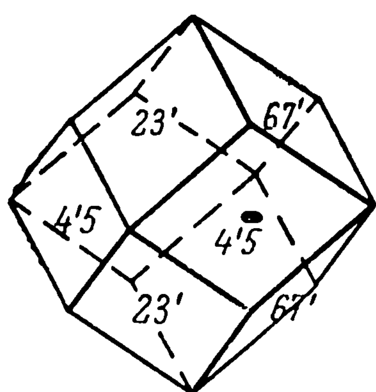

(23)(3VII')$^{S}_{r}$

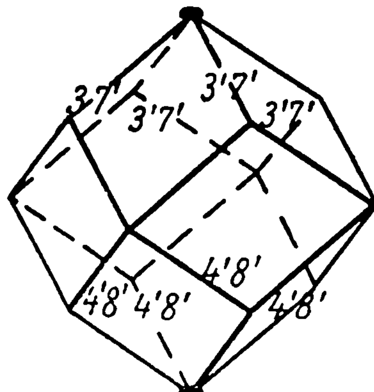

(24)(3VII')$^{S}_{l}$

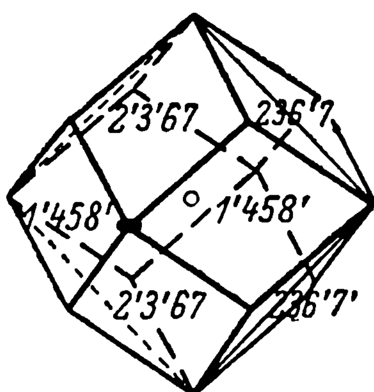

(18)(3VII)$^{S}_{2'4'}$

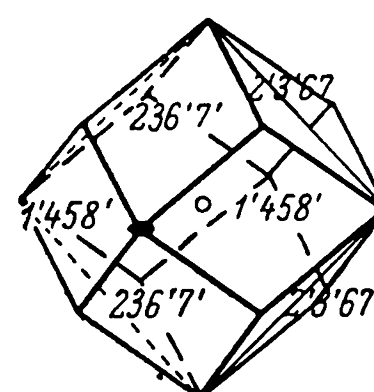

(21)(3VII)$_{34'}$

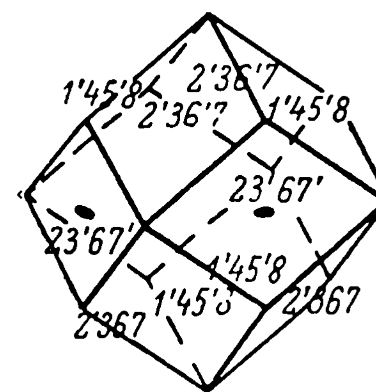

5(δ1)(3VII')$_{26}$

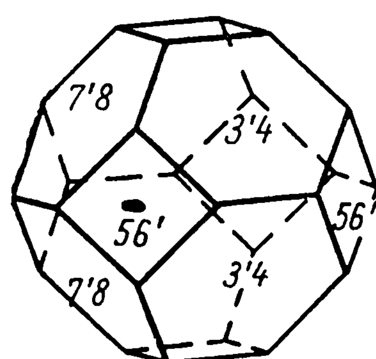

5δ1(3VI')

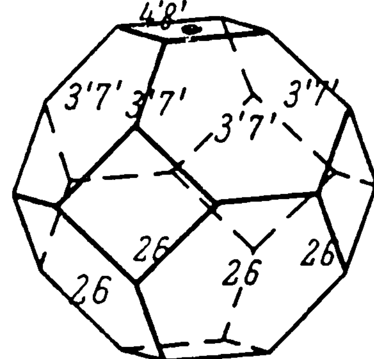

2(δ2)(3VI)$_{3'4'}$

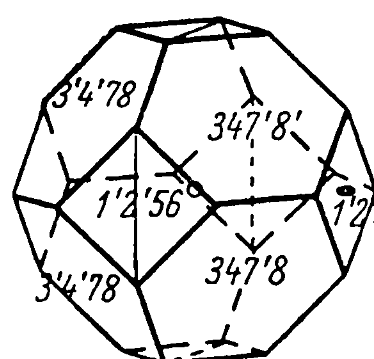

8(χ2)(3χVI)

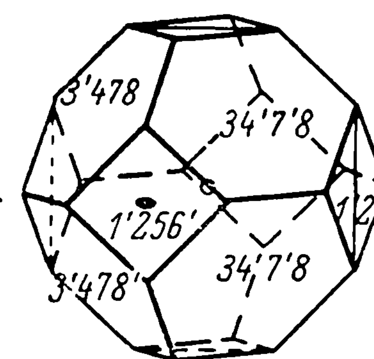

8(χ3)(3χVI)

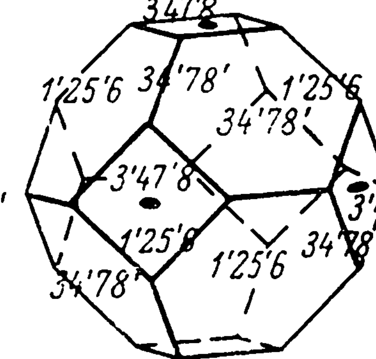

21(χ1)(6VI)$_{1'2'}$

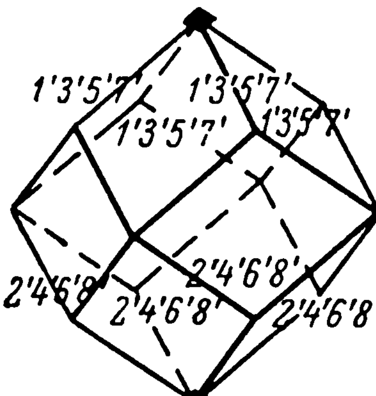

5δ1(3VII)^{c}

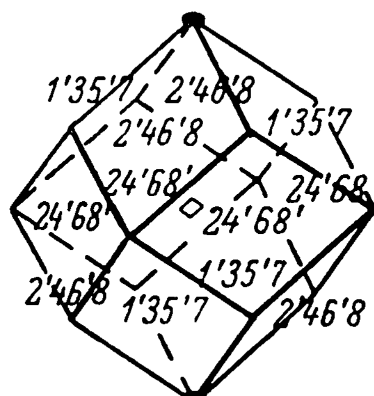

2(δ2)(3VII)$^{S}_{23'}$

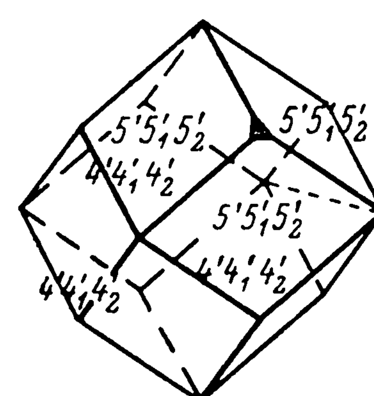

18(χ2)(3χVII)^{c}

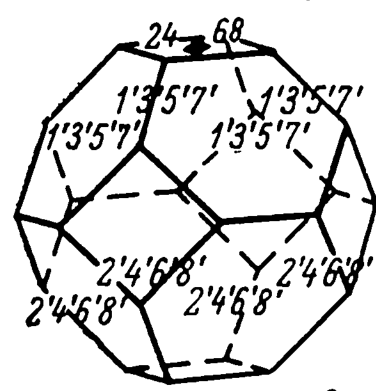

8(χ3)(3χVII)^{c}

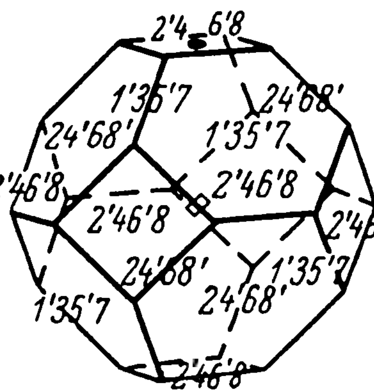

21(χ1)(6VII)$_{1'3}$

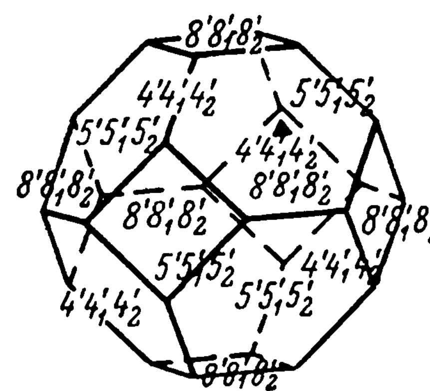

7(χ4)(9VI)$^{S}_{1'2'}$


21(χ1)(3πVI)$^{S}_{1'2'}$


14α1(13VI)$^{S}_{4'5'}$


7(χ4)(9VII)$^{S}_{1'2'}$


21(χ1)(3πVII)$_{1'2}$


14α1(13VII)$^{S}_{4'5'}$

$(25)(13\,VI)$ $19(13\,VI)$ $25(\chi 1)(13\alpha VI)$ $19\chi 1(13\alpha VI)$ $19\delta(13\varphi VI)$

$(26)(1VI)^{s}_{r}$ $(27)(1VI)^{s}_{l}$ $7\chi 1(1VI_7)$ $2(\chi 5)(1VI_7)_{1'6'}$ $4\chi 2(1VI_7)_{1'2'}$

$(26)(1VII)_{r}$ $(27)(1VII)_{l}$ $7\chi 1(1VII_6)$ $2(\chi 5)(1VII_6)_{1'8'}$ $4\chi 2(1VII_6)_{1'4'}$

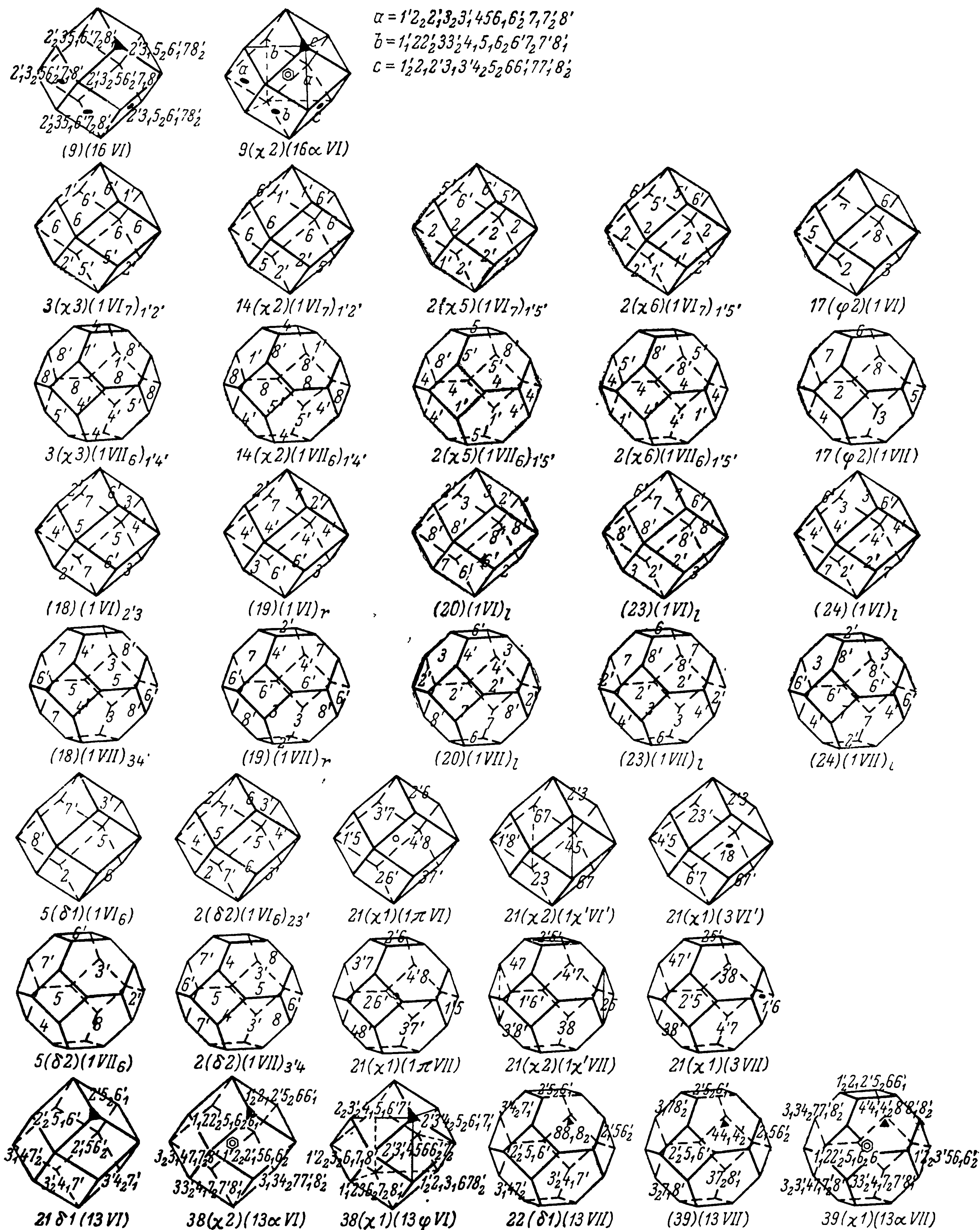
$6(\varphi 4)(1VI)_{23}$ $6(\chi 2)(1VI)$ $6(\chi 2)(1VI)_{33'}$ $17(\chi 1)(1VI)_{1'7'}$ $(21)(1VI)$

$6(\varphi 4)(1VII)^{c}_{34}$ $6(\chi 2)(1VII)$ $6(\chi 2)(1VII)_{33'}$ $17(\chi 1)(1VII)_{1'7'}$ $(21)(1VII)$

$(23)(1VI)^{s}_{r}$ $(24)(1VI)^{s}_{l}$ $7\delta 1(1VI_7)$ $5\delta 2(1VI_7)_{2'3'}$ $4\delta 1(1VI_7)_{2'3'}$ $2(\delta 2)(1VI_7)_{2'7'}$

$(23)(1\chi VII)^{s}_{r}$ $(24)(1VII)^{s}_{l}$ $7\delta 1(1VII_7)$ $5\delta 2(1VII_7)^{c}_{3'4'}$ $4\delta 1(1VII_7)_{3'4'}$ $2(\delta 2)(1VII_7)_{3'4'}$

$8(\chi 4)(3VI')_{22'}$ $18(\chi 3)(1\chi' VI)_{23}$ $8(\chi 4)(3VII)_{33'}$ $18(\chi 3)(1\chi' VII)_{34}$ $21\chi 1(13\,VI)$ $(38)(13\,VI)$



ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИМЕЧАНИЯ СОСТАВИТЕЛЕЙ

«Правильное деление плоскости и пространства под названием «Reguläre Plan- und Raumhteilung» первоначально было опубликовано в Abhandlungen der K. Bayer Akademie der Wissenschaft, München, 1899, Cl. 11, Bd XX, Abth. 11, S. 465—588, Taf. I—XIII, Fig. 1—23.

При ссылках на основные труды Е. С. Федорова, положенные в основу данной работы, используются следующие сокращения, введенные Е. С. Федоровым:

а) Начала учения о фигурах — Н. У. Ф.

б) Этюды по аналитической кристаллографии — Э. А. К.

в) Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде — У. С. I

г) Симметрия конечных фигур — У. С.II

д) Симметрия правильных систем фигур — У. С.III

е) Симметрия на плоскости — У. С.IV

Библиографические данные об этих работах см. в книге Е. С. Федорова «Симметрия и структура кристаллов. Основные работы». М.—Л., 1949.

Для удобства пользования в некоторые таблицы добавлена графа с современными обозначениями точечных и пространственных групп по Герману—Могену.

ПРИМЕЧАНИЯ К I ЧАСТИ

[1]. Проблема деления пространства в настоящее время не является чисто геометрической и находит приложение в решении многих вопросов физики кристаллов.

[2]. В настоящее время термин «закономерное деление» обычно заменяется термином «правильное разбиение».

[3]. Утверждение Федорова, что плоскую сетку можно построить, взяв за исходную произвольную точку внутри параллелогона, строго доказывается в Н. У. Ф. (с. 239, теорема 6). Оно интересно тем, что в нем в неявной форме выражено современное представление о решетке как элементе симметрии кристаллической структуры.

Каждая плоская сетка определяется репером a, b, составленным из векторов этой сетки, на котором можно построить примитивный параллелограмм. С каждым репером можно сопоставить выражение $(\bar{a}x+\bar{b}y)^2=a^2x^2+ab\ \cos\alpha xy+b^2y^2$, которое называется квадратичной формой репера.

[4]. Первоначально Е. С. Федоровым выделялись следующие системы симметрии с единичными направлениями: $2p$-гональная, p-гональная, дигональная и моногональная. Объединение видов симметрии в системы связано с оригинальным методом вывода симметрий конечных фигур, основанным на рассмотрении типических изоэдров (Н. У. Ф., § 36—54). В дальнейшем Е. С. Федоров их объединил и считал главными две системы — $2p$-гональную и дигональную, фигурирующие в настоящей работе. Такое деление, кроме практического удобства, основано и на том обстоятельстве, что оно соответствует двум типам уравнений, применяемых для описания видов симметрии (см. примечание об уравнениях). Одни из них применимы для описания видов симметрии с одной главной осью порядка >2, а другие — только для видов, содержащих оси 2, $\bar{2}$, $\bar{1}$, 1.

Каждая из выделенных систем в свою очередь делится на 4 разряда, которые в некоторых работах автора имеют собственные наименования:

I — Голоэдрия	$2p$-гональная	дигональная
II — Полигональная гемиэдрия		
III — Гемиэдрия		
IV — Тетартоэдрия		

[5] Учение о «видимой симметрии» соответствует современной теории гомологии кристаллов, наиболее полно разработанной В. И. Михеевым в работе «Гомология кристаллов» (Л., 1961, 208 с.). Представления «видимой симметрии» широко использовались Е. С. Федоровым. С ними связаны учение об однородных деформациях, закон кристаллографических пределов, кристаллохимический анализ и др. В этой работе «видимая симметрия» играет вспомогательную роль при выводе групп симметрии.

Теория «видимой симметрии» не была полностью разработана, ее законы воспринимались Е. С. Федоровым интуитивно: так, он полагал, что число видов «действительной» и «видимой» симметрии одинаково, хотя последних, как было установлено впоследствии, в 7 раз больше (32 и 219).

[6]. В Н. У. Ф. возможность приложения однородных деформаций не связывалась с наличием фигур единичных направлений. Отсутствие единичных направлений, вообще говоря, не может наложить ограничений, и деформацию можно провести в направлении одного, произвольно выбранного симметрично-равного направления, которое при этом преобразуется в единичное. С этой точки зрения теоремы следует рассматривать как леммы, необходимые Е. С. Федорову для утверждения того факта, что кристаллы с единичными направлениями могут испытывать афинные преобразования вдоль этих направлений без изменения симметрии. Иными словами, кристаллы с единичными направлениями в отношении однородных деформаций (афинных преобразований) обладают некоторым числом степеней свободы, равным числу единичных направлений.

[7]. Строгое доказательство см. в работе А. Шенфлиса «Kristallsysteme und Kristallstruktur» (Leipzig, 1891).

ПРИМЕЧАНИЯ КО II ЧАСТИ

[1]. Согласно современной терминологии, «плоскость слоя» однозначно может быть охарактеризована нормальным к ней вектором обратной решетки.

[2]. Здесь и далее под осями составной симметрии понимаются зеркально-поворотные оси.

[3]. Смотри примечание [5] к I части книги, с. 16 (о видимой симметрии).

[4]. В работах Е. С. Федорова часто можно встретить подобные утверждения. Действительно, всякая четная ось высшего порядка (> 2) включает и операции симметрии, соответствующие осям, порядок которых целое число раз содержится в наименовании оси: ось 6 содержит повороты ± 60, ± 120, ± 180, ось 4 — повороты ± 90, ± 180. Отмеченное обстоятельство, весьма важное для предлагаемого Е. С. Федоровым метода вывода пространственных групп, почему-то не нашло полного отражения в современных курсах кристаллографии, где, как правило, приводится лишь один частный случай: $\bar{4} \geqq 2$ и совершенно игнорируются $6 \geqq 3 \times 2$, $4 \geqq 2 \times 2$. Надо иметь в виду, что равенство носит направленный, односторонний характер, на что указывает стрелка (лучше записать: $6 \geqq 3,2$; $4 \geqq 2,2$).

[5]. Выделение Е. С. Федоровым симморфных, гемисимморфных и асимморфных групп пространственной симметрии существенно отличает его метод вывода от осуществленного одновременно вывода А. Шенфлиса.

Основываясь на молекулярном представлении о строении вещества, Е. С. Федоров в начале предполагал, что среди выведенных им типов кристаллических структур могут быть только относящиеся к симморфным (все частицы, слагающие кристалл, находятся в параллельном положении) и гемисимморфным (кристалл состоит из равного числа «правых» и «левых» молекул) системам.

Последующие определения структур показали важную роль в строении кристаллов именно асимморфных систем симметрии (координационные структуры). Интересно, что Е. С. Федоров в статье «Первое констатирование опытным путем асимморфной системы» (Зап. Горн. ин-та, 1914, т. 5) сразу же отказался от первоначальных воззрений.

Любопытна в этом отношении статья Е. С. Федорова «Правильные системы точек и структуры уже исследованных кристаллов» (1916 г.), опубликованная только в 1957 г.[1], где он сопоставляет первые структурные определения с типами структур, описанными в данной книге.

[6]. Е. С. Федоров имеет в виду то, что в бесконечных системах точек операции поворота вокруг оси 2 или отражения в плоскости m с последующим переносом вдоль этих элементов симметрии на целую трансляцию напоминают действие винтовой оси (плоскости скользящего отражения) с той лишь разницей, что в последних скольжение всегда равно $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{4}$ доли элементарной трансляции.

---

[1] Рукописные материалы Е. С. Федорова в Архиве АН СССР. — Тр. Архива АН СССР, 1957, вып. 14, с. 104—136.

И. И. ШАФРАНОВСКИЙ, В. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

УЧЕНИЕ О ПАРАЛЛЕЛОЭДРАХ И ТЕОРИЯ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ ФИГУР В ТВОРЧЕСТВЕ Е. С. ФЕДОРОВА

Две неразрывно связанные между собой темы играют доминирующую роль в научном творчестве Е. С. Федорова: учение о параллелоэдрах и теория правильных систем фигур (точек). Именно они лежат в основе федоровских представлений о кристаллическом строении. Начиная с самых первых выступлений Федорова-студента в Минералогическом обществе и кончая его последними статьями, опубликованными после смерти ученого, эти темы буквально пронизывают все его творчество, придавая ему исключительную стройность и целеустремленность.

Первые полные выводы трехмерных параллелоэдров и 230 законов бесконечной симметрии принадлежат, как известно, к величайшим достижениям гениального кристаллографа. Б. Н. Делоне следующим образом характеризует результаты вывода 230 пространственных групп симметрии: «Общий математический закон структуры один, и его нашел Федоров. К открытию этого закона в течение века были близки многие выдающиеся ученые, но они выводили только его частные случаи или некоторые следствия из него, самый же закон окончательно был найден Федоровым» [1, с. 5].

Прежде чем перейти к обзору развития двух вышеупомянутых тем в трудах Федорова, необходимо напомнить вкратце о том, что предшествовало им в старинной научной литературе. В настоящем очерке мы фиксируем внимание в основном на значении федоровских параллелоэдров и связанных с ними правильных систем фигур для кристаллографии (их роль в математике освещена в статье Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулина, М. И. Штогрина, см. с. 235—260). Поэтому остановимся лишь на предшественниках Е. С. Федорова по линии создания первых теорий кристаллического строения.

В 1611 г. И. Кеплер (1571—1630) в небольшом трактате «О шестиугольном снеге» задался вопросом о первопричине шестиугольной формы снежинок («Почему точно так же не выпадают пятиугольные или семиуголь-

ные звездочки?») [2, с. 3]. В своих рассуждениях он исходил из того, что при раскладке одинаковых шариков на плоскости каждый шарик окружается шестью такими же шариками. Далее Кеплер вспоминает о следующем опыте: одинаковые шарики из мягкого вещества (воска), помещенные в круглый сосуд, сжимаемый со всех сторон медными обручами, принимают форму ромбододекаэдров. Аналогичную форму в природе имеют и пчелиные ячейки (вытянутые ромбододекаэдры); по форме к ним приближаются и зерна внутри плода граната. Такие формы нацело выполняют пространство, будучи параллельно ориентированными и смежными по целым граням.

Так И. Кеплер пришел к идее о геометрии шаровых упаковок и полиэдрах, получающихся при всестороннем сжатии шаров в таких упаковках.

Обзор различных возможных шаровых упаковок привел его к выводу плотнейшей кубической шаровой упаковки (центры шаров образуют кубическую центрогранную решетку) и двух менее плотных упаковок — простой гексагональной и простой кубической (примитивная решетка). Плотнейшая гексагональная шаровая упаковка осталась для него неизвестной (впервые она была отмечена лишь в конце XIX столетия В. Барлоу). Исходя из шаровых укладок, на основе их всестороннего сжатия, Кеплер вывел три идеальных многогранника, соответствующих параллелоэдрам, — ромбододекаэдр, гексагональную призму и куб (федоровский кубооктаэдр был ему неизвестен). Применяя к снежинкам построения из шаровых частиц, Кеплер близко подошел к позднейшим идеям о строении кристаллов. Важно отметить, что исходя из шаровых упаковок, он выводил полиэдры, аналогичные федоровским параллелоэдрам.

В 1667 г. Р. Гук (1635—1703) в своей «Микрографии» снова развивал идею о сложении кристаллов из шарообразных частиц. «Думаю, — писал он, — что обладая достаточным временем и необходимыми возможностями, я мог бы доказать положение, согласно которому все эти правильные фигуры (кристаллы, — *И. Ш.*, *В. Ф.-К.*), поразительно разнообразные и причудливо украшающие великое множество тел, образуются в результате лишь трех или четырех положений или комбинаций сферических тел» [3, с. 153]. К таким выводам Гук пришел, наблюдая мелкие осколки кристаллов алмаза и других веществ с треугольными, шестиугольными и квадратными очертаниями.

В небольшом сочинении «Философские размышления, выведенные из формы солей» (1688 г.), итальянский ученый Д. Гуглиельмини (1655—1710) считал кристаллические структуры сложенными не из шарообразных частиц, а из мельчайших многогранников. Так, например, октаэдрическим по облику кристаллам алюмокалиевых квасцов он приписывал сложение из мельчайших октаэдров с тетраэдрическими пустотами между ними.

Х. Гюйгенс (1629—1695) в «Трактате о свете» (1690 г.) объяснял оптические свойства и спайность кальцита с помощью гипотезы, согласно которой кристаллы исландского шпата построены из сплющенных эллипсоидов вращения.

М. В. Ломоносов (1711—1765) в диссертации «О рождении и природе селитры» (1749 г.) развивал идею о сложении кристаллов из шарообразных частиц. Он писал: «Пусть шесть корпускул расположены друг относительно друга так, что прямые линии, соединяющие их центры, образуют равносторонние треугольники; в результате получается фигура, ограниченная шестью линиями, подобно призмам, образуемым селитрой. Углы кристаллов селитры соответствуют предполагаемому расположению частичек, так как большинство их в отдельности составляет 120°. . . На основании нашей гипотезы можно легко объяснить другие роды кристаллов, например кубические кристаллы поваренной соли, где линии, проходящие через центры частичек, составляют кристаллы» [4, с. 273—275].

Различая два типа шаровых укладок на плоскости: плотнейший (треугольный или ромбический) и разреженный (квадратный), Ломоносов, конечно, в очень приближенном виде предугадывал будущий закон кристаллографических пределов Е. С. Федорова (мир кристаллов подразделяется на два типа: кубический и гексагональный).

Ранним предшественником Е. С. Федорова по линии параллелоэдров был крупнейший французский кристаллограф Р. Ж. Гаюи (1743—1822). Основываясь на явлении спайности кристаллов, он вслед за Гуглиельмини приписывал элементарным кристаллическим частицам не шаровую, а полиэдрическую форму (до него, также основываясь на спайности, аналогичную идею выдвигал Т. Бергман).

Согласно воззрениям Гаюи, кристаллы представляют собой своеобразные кладки из мельчайших «кирпичиков», соответствующих предельно малым спайным осколкам. Изучая такие осколки, он чисто опытным путем нашел пять типов примитивных спайных полиэдров: параллелепипед, гексагональную призму, ромбододекаэдр, октаэдр и тетраэдр. Первые три многогранника соответствуют идеальным федоровским три-, тетра- и гекса-параллелоэдрам. Среди примитивных форм Гаюи, так же как до него Кеплер, не нашел федоровского «гептапараллелоэдра», или кубооктаэдра.

Кристаллы с октаэдрической спайностью (алмаз, флюорит) Гаюи, так же как и Гуглиельмини, представлял себе сложенными из параллельно расположенных октаэдров и пустотелых тетраэдров (или наоборот). Дальнейшее деление примитивных форм вдоль плоскостей, параллельных их граням, приводит к многогранникам в виде тетраэдров, тригональных призм и параллелепипедов. Этим простейшим по числу граней замкнутым многогранникам (тетраэдр — 4 грани, тригональная призма с пинакоидом — 5 граней, параллелепипед — 6 граней) Гаюи приписал роль «интегрирующих молекул». Складываясь, они образуют примитивные «кирпичики», а из последних строятся кристаллические образования. Анализ таких фигур, кроме того, показывает, что все они могут складываться в системы параллелепипедов. Придя к выводу о наличии в каждом кристалле совокупностей мельчайших параллелепипедов, равных и параллельных между собой, Гаюи тем самым заложил основу для будущей теории параллелепипедально-решетчатого строения кристаллов. Как видим, концепция французского кристаллографа, несмотря

на всю свою наивность с современной точки зрения, сыграла большую историческую роль. Мало того, его «элементарные кирпичики» в какой-то мере предвосхищают федоровские параллелоэдры, так же как его интегральные молекулы предшествуют федоровским стереоэдрам.

Выдающийся английский ученый В. Г. Волластон (1766—1828) отметил, что полиэдрическая форма «кристаллических молекул» Гаюи может быть выведена из элементарных шариков Гука и эллипсоидов Гюйгенса путем замены их центральными точками, соединенными между собой прямыми линиями.

В 1824 г. профессор физики во Фрейбурге А. Зеебер обратил внимание на то, что вплотную прилегающие друг к другу элементарные «кирпичики» Гаюи не объясняют ряда явлений, и в частности расширения кристаллов при нагревании и их сжатия при охлаждении. Далее, он пришел к выводу о невозможности сказать вообще что-либо достоверное об истинной форме гипотетических элементарных «кирпичиков». Все это натолкнуло его на мысль о замене их точками — центрами их тяжести. Такой подход привел Зеебера к системе точек, которую он и назвал впервые «пространственной решеткой». К аналогичным выводам пришел позднее (в 1843 г.) во Франции ученик и последователь Гаюи Г. Делафосс.

Немецкий профессор М. Л. Франкенгейм (1801—1869) опубликовал в 1835 г. геометрическое исследование различных типов решеток. В результате им было выведено 15 «сетчатых», т. е. решетчатых расположений точек, которым по габитусам и спайности соответствовали 15 основных кристаллических форм. Однако Франкенгейм допустил ошибку, приняв одну и ту же моноклинную решетку за две разные. Впоследствии, уже вслед за Браве, он должен был признать это упущение и уступить приоритет правильного и исчерпывающего вывода четырнадцати решеток своему французскому сопернику.

Знаменитый вывод О. Браве (1811—1863) содержится в «Мемуаре о системах точек, правильно распределенных на плоскости и в пространстве» (1849 г.). Этот труд, посвященный теории пространственной решетки, содержит окончательный вывод 14 решеток, названных впоследствии решетками Браве. «Мемуар» оказал большое влияние на развитие кристаллографии и послужил логическим основанием для разделения всего мира кристаллических образований на 7 систем (сингоний). Применение теории решетчатого строения к кристаллографии Браве описал в своих обширных «Кристаллографических этюдах».

Е. С. Федоров, рассматривая решетки Браве как частные случаи правильных систем точек, дал следующую восторженную характеристику достижениям своего предшественника: «Первые результаты математической теории правильных систем точек есть в то же время и триумф человеческого ума в области изучения кристаллов, так как выводы, шедшие из глубины кабинета, совпали как раз с тем, что составляло результат обширного опыта, принявшего со временем колоссальные размеры. Перед строгими кабинетными выводами как бы преклонилась природа, и кристаллы расположились в тех системах, которые явились необходимым ма-

тематическим выводом из понятия о правильных системах точек (пространственных решетках)» [5, с. 1].

Дальнейшее развитие теория кристаллического строения получила в трудах французского математика М. Э. К. Жордана (1838—1922) и немецкого физика-кристаллографа Л. Зонке (1842—1892).

В «Мемуарах о группах движений» (1868 г.) Жордан дал математический вывод всех групп движения. Отсюда следовала возможность вывода бесконечно протяженных систем точек, способных в различных положениях совмещаться самим с собой.

Л. Зонке использовал теорию Жордана для вывода правильных систем точек, соответствующих центрам тяжестей элементарных частиц в кристаллических структурах. Ему принадлежит следующее определение: «Кристаллы, мыслимые как неограниченные тела, являются правильными бесконечными точечными системами, т. е. такими, в которых вокруг каждой материальной точки расположение остальных точно такое, как вокруг любой другой материальной точки». И далее: «Кристалл является конечным куском бесконечной правильной системы точек» [6, с. 10]. Как известно, Зонке осуществил лишь частичный вывод пространственных групп. Характеризуя точки правильных систем пучками лучей, направленных от данной точки к остальным точкам той же системы, он предположил, что такие пучки должны быть обязательно совместимо равными. Ограничившись подобными правильными системами точек, Зонке вывел для них 65 совокупностей элементов бесконечной симметрии, представляющих так называемые пространственные группы первого рода. В «Началах учения о фигурах» Е. С. Федоров впервые указал на неполноту вывода Зонке: пучки лучей для точек правильной системы могут быть не только совместимо-равными, но и отраженно-равными. Тем самым дальнейший шаг в развитии теории кристаллического строения был сделан Е. С. Федоровым, к творчеству которого мы и переходим.

Сам Е. С. Федоров отмечал [7], что вопросы, связанные со структурой кристаллов и многогранниками, начали увлекать его с шестнадцатилетнего возраста, но вплотную их разработкой он смог заняться только после 1881 г., когда он стал студентом Горного института, в то время ему уже было 28 лет.

Студент Федоров выступал с рядом сообщений на заседаниях Петербургского минералогического общества. Самое первое его выступление 13 октября 1881 г. было посвящено разъяснению законов двойникования с помощью некоторых законов геометрии (к сожалению, краткая протокольная запись ограничивается лишь упоминанием темы доклада). На заседании общества 16 ноября 1882 г. Федоров познакомил слушателей с приложением разрабатываемой им теории кристаллической структуры к явлениям спайности и роста кристаллов. В протоколе этого заседания мы впервые встречаемся с упоминанием о федоровских параллелоэдрах. Согласно записи, элементарные кристаллические сферы имеют формы три-, тетра-, гекса- и гептапараллелоэдров. Спайность — результат разрывов элементарных параллелоэдров по определенным плоскостям. Рост кри-

сталлов происходит по направлениям, соответствующим плоскостям прикосновения элементарных параллелоэдров. Эти же плоскости отвечают двойниковым плоскостям [8].

Выступления молодого ученого привлекли внимание маститого автора вывода 32 видов симметрии академика А. В. Гадолина. Ознакомившись с обширной рукописью первой федоровской монографии «Начала учения о фигурах», Гадолин настоял на ее публикации в Записках Минералогического общества.

Напомним, что замысел написания этой книги относится к 1869 г., т. е. к моменту поступления шестнадцатилетнего Федорова в инженерное училище. «Вот эта-то, казалось бы, чисто математическая гармония и заняла мой ум в начале моих научных попыток», — писал впоследствии Евграф Степанович [7, с. 2].

Из его автобиографических записок мы узнаем, что в 1879 г. работа была в основном закончена. В 1880 г., опять-таки по свидетельству самого ученого, он пришел в Горный институт уже «с толстой рукописью в руках». Окончательно книга была готова к печати в 1883 г.

Обширная рукопись начинающего автора (280 печатных страниц и 200 чертежей) вначале не встретила поддержки ни у выдающегося математика академика П. Л. Чебышева, ни у профессора минералогии Горного института, впоследствии академика П. В. Еремеева. Лишь энергичное вмешательство академика А. В. Гадолина решило судьбу федоровского труда.

В 1885 г. «Начала учения о фигурах» после долгих мытарств увидели свет. Анализ творческого пути Е. С. Федорова должен основываться в первую очередь на изучении этой замечательной книги. В ней заложены ростки почти всех последующих достижений ученого и исходные вехи, наметившие дальнейшие пути развития современной федоровской кристаллографии [9].

В этой знаменитой книге для нас особенно важен четвертый отдел, в котором излагается федоровское учение о выполнении плоскости и пространства параллелогонами и параллелоэдрами. Именно это учение послужило основой для последующей разработки Е. С. Федоровым его теории кристаллической структуры и созданной им позднее классификации всего мира кристаллов.

Здесь ученый впервые устанавливает законы выполнения пространства. Он выводит выпуклые многогранники — параллелоэдры, которые целиком выполняют пространство, будучи равными, параллельно ориентированными и смежными по целым граням. Выявляет четыре типа таких параллелоэдров — трипараллелоэдры (кубы и их деформации), тетрапараллелоэдры (гексагональные призмы и их деформации), гексапараллелоэдры (ромбододекаэдры и их деформации) и гептапараллелоэдры (кубооктаэдры и их деформации). С математической точки зрения следует выделять еще и пятый параллелоэдр — разновидность гексапараллелоэдра с восемью ромбическими и четырьмя шестиугольными гранями.

Параллелоэдры можно далее разделять на равные части, заполняющие пространство не в параллельном положении. Такие части Федоров назвал стереоэдрами.

Согласно определению самого ученого, «равные или симметричные (обратно равные) многогранники, выполняющие пространство, называются стереоэдрами; если же они выполняют пространство в параллельном положении, то называются параллелоэдрами» [10, с. 215]. И далее: «Несколько стереоэдров всегда складываются в один параллелоэдр» [10, с. 236].

Значение, а вместе с тем и новизну созданного им геометрического учения применительно к кристаллографии сам его создатель в Предисловии к своей книге характеризует следующим образом: «Особенно замечательна неприкосновенность отдела о выполнении пространства равными фигурами, так как со времени Гаюи в отделе этом минералогия ощущала безусловную потребность. Достаточно вспомнить камень преткновения для теории структуры этого замечательного минералога, чтобы убедиться в справедливости сказанного. Камень преткновения для этой теории, как известно, состоял в том факте, что имеется (например, у флюорита) спайность по октаэдру. Если бы Гаюи знал о существовании и свойствах особо притупленного октаэдра (кубооктаэдра, — *И. Ш.*, *В. Ф-К.*), то ему не пришлось бы прибегать к натяжкам для объяснения этого факта, натяжкам, заставившим его последователей отрешиться от его первоначальной гипотезы и прибегнуть к помощи других. Если бы современные минералоги были знакомы с теорией параллелоэдров, им не пришлось бы за элементы структуры кристаллов правильной системы принимать в некоторых случаях ромбоэдры» [10, с. V, VI]. В приведенной цитате Федоров говорит об упоминавшихся выше попытках Гаюи трактовать структуру флюорита как кладку из октаэдров и тетраэдров, в которой тетраэдры (или октаэдры) являются пустотелыми. Далее он упоминает о тенденции некоторых авторов рассматривать центрогранную кубическую решетку, как простую решетку с элементарными ячейками в виде ромбоэдров.

В своей книге Федоров не ограничивается описанием параллелоэдров и стереоэдров. Последние он связывает с правильными системами точек. «Каждая правильная система точек есть система соответственных точек стереоэдров», — пишет он [10, с. 238]. Попутно им отмечается неполнота вывода законов бесконечной симметрии для правильных систем фигур (точек) у Л. Зонке. В симметрийных законах последнего были учтены лишь элементы симметрии 1-го рода (оси и винтовые оси симметрии) и не приняты во внимание элементы 2-го рода (плоскости симметрии, инверсионные или зеркально-поворотные оси, плоскости скользящего отражения). Небольшое замечание, посвященное этому вопросу, впоследствии послужило началом для полного вывода 230 пространственных групп. Два важнейших произведения Е. С. Федорова — «Симметрия правильных систем фигур» (1890—1891 гг.) и публикуемая в настоящей книге монография «Regulare Plan- und Raumtheilung» (1900 г.) — представляют дальнейшее углублен-

ное развитие положений, сформулированных в юношеском основополагающем произведении ученого «Начала учения о фигурах».

Существование 230 пространственных групп симметрии, впервые установленное в первом из двух указанных сочинений (1890 г.), является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. Однако важно отметить, что сам Федоров, понимая важность сделанного им вывода, не рассматривал его как самостоятельный закон [11]. По-видимому, это происходило потому, что, согласно ранним взглядам ученого, не все пространственные группы удовлетворяют требованиям, предъявлявшимся им тогда к строению кристаллов. Он считал, что параллелоэдры в качестве «строительных кирпичиков» кристаллического вещества должны быть параллельно ориентированными в структурах. Однако среди выведенных им пространственных групп симметрии имели место и такие, в которых отдельные фигуры не были параллельными. В описании 230 симметрийных групп Федоров неизменно упоминает о соответствующих им параллелоэдрах и правильных системах точек (фигур).

Именно в связи с таким подходом пространственные группы подразделялись им на симморфные, гемисимморфные и асимморфные. Напомним, что симморфной называется такая пространственная группа, в которой параллельно каждой оси симметрии соответственного вида симметрии проходят оси симметрии (или оси симметрии вместе с винтовыми осями), а параллельно каждой плоскости симметрии — плоскости симметрии (или плоскости симметрии вместе с плоскостями скользящего отражения). В случае симморфных систем все пространство можно заполнить взаимно параллельными параллелоэдрами, имеющими ту же конечную симметрию, что и вся система в целом.

Пространственная группа называется гемисимморфной в том случае, если параллельно хотя бы одной плоскости симметрии соответственного вида симметрии проходят не плоскости симметрии, а плоскости скользящего отражения. Такие системы характеризуются общностью только элементов совмещения параллелоэдров и всей системы.

Асимморфной называется такая пространственная группа, в которой параллельно хотя бы одной оси симметрии соответственного вида симметрии проходят только винтовые оси. Асимморфная система не имеет ни одного элемента совмещения, общего с параллелоэдром. Отсюда следует, что в асимморфных пространственных группах не все фигуры, образующие правильную систему, находятся в параллельном положении. Видимо поэтому Федоров, не дооценив значения асимморфных систем, не придавал практического значения всем 230 пространственным группам и не приписал своему важнейшему результату в области симметрии кристаллов значения закона.

До появления первых работ по рентгеноструктурному анализу кристаллов он видел лишь один путь определения кристаллической структуры. Этот путь шел через параллелоэдр как единственную, по мысли Е. С. Федорова, основу такого строения. Взгляды Е. С. Федорова на параллелоэдры, на универсальные «кирпичи», строящие любой кристалл, базирова-

лись на господствовавших в то время в химии представлениях о молекулярном строении вещества. Поэтому Е. С. Федоровым было обращено пристальное внимание на выявление связи между параллелоэдрами и элементами симметрии пространственных групп. Отсюда он предполагал вывести все возможные роды структур кристаллов.

Вот что он писал по этому поводу в статье «Сопоставление кристаллографических результатов г-на Шенфлиса с моими» (Zusammenstellung der kristallographischen Resultate des Herrn Schoenflies und der meinigan; 1892 г.): «Теоретики, писавшие о кристаллической структуре, до сих пор отождествляли представление о возможных видах структур с представлением о правильных системах точек. Даже Шенфлис остался на этой точке зрения. При этом различие в отдельных системах основывается на различии пространственного положения элементов симметрии.

Однако мы будем считать, что виды структур являются различными только тогда, когда их параллелоэдры различны, хотя бы элементы симметрии оставались при этом полностью идентичными. Таким образом, теория правильного деления пространства привела нас к совершенно новой точке зрения. Итак, возможный род структур определяется не только посредством элементов симметрии, но также с помощью нормальных параллелоэдров и законами распределения последних на стереоэдры. Таким образом, например, для гемиэдрии и голоэдрии триклинной сингонии возможны одна правильная система точек и четыре правильные системы параллелоэдров, а следовательно, и четыре рода кристаллических структур» [12, с. 323].

В основополагающей статье, открывающей цикл «Теория структуры кристаллов» (1895 г.), Федоров развивает свои взгляды о роли параллелоэдров в реальных кристаллических структурах. «Следует иметь в виду, — пишет он, — что кристаллическая молекула является чем-то отличающимся от химической молекулы. Она представляет подлинный строительный кирпичик кристаллического вещества и, естественно, определяет его сингонию так же, как и его симметрию. . . В этом смысле параллелоэдры следует рассматривать как части пространства, принадлежащие отдельным кристаллическим молекулам. В то же время параллелоэдры являются комплексами меньших частей, которые мы называем стереоэдрами. Стереоэдры мы можем также определить, как участки пространства, принадлежащие отдельным химическим (?) молекулам. . . Иными словами: кристаллическое вещество является системой параллелоэдров, усаженных бесконечным количеством точек» [12, с. 403, 405].

Само собой разумеется, что смысл понятия «элементарная частица» со времени цитированных выше работ Федорова коренным образом изменился, неизбежно должен был измениться также и смысл понятия «федоровский параллелоэдр». Форма параллелоэдра не отвечает форме «частицы», а дает лишь геометрическое деление кристаллического пространства на равные части. В этом отношении понятие «параллелоэдр» имеет такое же вспомогательное значение, как и понятие «элементарная ячейка». Не лишено, однако, вероятия предположение, что замена параллеле-

пипедальной формы ячейки формой параллелоэдра, согласованной со структурой, позволит более углубленно подойти к моделированию структуры, связывая последнюю с внешним ограничением кристалла (согласно известному закону Браве). Как уже отмечалось выше, приписывая главенствующую роль параллелоэдрам, Федоров не признал значения асимморфных систем. «Кристаллические структуры, названные мной асимморфными, я наперед отнес к невозможным или по меньшей мере к маловероятным», — писал он [12, с. 323].

В результате из выведенных им 1182 возможных видов структур он считал вероятными лишь 246. Необходимо, однако, подчеркнуть, что позже, познакомившись с первыми расшифровками кристаллических структур и обнаружив в них асимморфные группы, Е. С. Федоров сразу же отметил их подчиненность выведенным им за 20 с лишним лет до этого пространственным группам. Он с удовлетворением отмечал, что одна из первых расшифрованных структур — структура пирита, — оказалась принадлежащей к асимморфной группе [13], которая по его прежним представлениям считалась невозможной.

Бессмертной заслугой Е. С. Федорова нужно считать не только его вывод 230 пространственных групп симметрии, но и их первое непосредственное определение на реальных структурах. Именно последнее оказало огромное влияние на дальнейшее развитие рентгеноструктурного метода и позволило применить математический аппарат, созданный великим ученым, для определения кристаллических структур.

В 1900 г. Е. С. Федоров опубликовал в трудах Баварской Академии наук свой обширный мемуар «Reguläre Plan- und Raumtheilung».

Русский перевод текста этого важнейшего труда великого русского кристаллографа дается в настоящем издании. Значение данной монографии для математики освещается в статье Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулина и М. И. Штогрина.

Сам Е. С. Федоров в заключительных фразах своего сочинения подчеркивает его математическую сущность: «Вышеизложенное полностью решает задачу отыскания правильных делений плоскости и пространства. Не возможен ни один другой тип, кроме приведенных здесь» (с. 86).

Вместе с тем начальная фраза мемуара указывает и на его кристаллографическую направленность: «Теория кристаллического строения, помимо прочего, выдвинула следующую чисто геометрическую проблему: закономерно разделить бесконечное воображаемое пространство на конгруэнтные и соответственно симметрично-равные конечные пространственные фигуры» (с. 7). Задачи выполнения пространства параллелоэдрами и выявления связанных с ними правильных систем точек нашли здесь наиболее полную трактовку, богато иллюстрированную таблицами и чертежами.

Как увидим далее, в последних своих работах, посвященных истолкованию реальных кристаллических структур, Е. С. Федоров неизменно ссылался именно на эту монографию. Свои достижения в области теорети-

ческой кристаллографии ученый стремился реализовать на практике, считая, что практическое применение теории является лучшим доказательством ее правильности. Это привело его к разработке оригинального метода кристаллохимического анализа, увенчавшего его позднейшее творчество.

На пути к созданию упомянутого метода Федоров, опять-таки исходя из своей теории кристаллического строения, основанной на учении о параллелоэдрах, открыл ряд обобщающих законов, утвердившихся в кристаллографии.

Одним из самых известных и важных федоровских законов является закон кристаллографических пределов. Теоретическое обоснование этого закона уже было дано в «Курсе кристаллографии» 1901 г., где по характеру развития форм все кристаллы были разделены на два типа — кубический и гексагональный. Такое разделение резко отличалось от распространенных в то время взглядов французского кристаллографа Малляра, согласно которому все кристаллы рассматривались как производные кубических форм.

Рациональность деления кристаллов на два типа вытекала из федоровской теории параллелоэдров. В самом деле, три идеальных параллелоэдра (три-, гекса-, и гептапараллелоэдры) характеризуются кубической симметрией, а четвертый (тетрапараллелоэдр) — гексагональной. Все низкосимметричные кристаллы, согласно федоровской теории однородных деформаций, выводятся из вышеупомянутых идеальных конфигураций и, следовательно, также должны примыкать к одному из двух типов.

Впоследствии Федоров предпринял систематическую проверку этого положения на естественных кристаллах. В работе 1903 г. «Критический пересмотр кристаллов минерального царства (материалы по молекулярной статике однородных твердых тел)» он на основании проведенной опытной проверки с уверенностью утверждает: «Мир кристаллов оказывается не единичным, но резко распадается на два царства, названные типами: кубическим и гипогексагональным» [14, с. 1]. В том же 1903 г., подводя итог упомянутой проверки, в специальной статье, посвященной закону кристаллографических пределов — «одному из самых общих законов кристаллизации», — он пишет: «Тот закон, о котором идет речь в этой заметке, не имеет чистого количественного выражения, а формулирует только пределы, к которым стремится приблизиться каждое кристаллическое вещество и от которых в большей или меньшей степени уклоняется под влиянием факторов, подчиненных другим физическим законам. В самом грубом виде закон, вытекающий из пересмотра всего материала, может быть сформулирован в словах: все кристаллы псевдотетрагональны или псевдогексагональны» [15, с. 155].

В связи с тем что учение о параллелоэдрах в настоящее время может рассматриваться лишь как геометрическое, а не физическое построение, закон кристаллографических пределов нуждается сейчас в новом теоретическом обосновании. Частично такое обоснование может быть сделано, исходя из принципа плотнейших шаровых упаковок, играющего осново-

полагающую роль в современной структурной кристаллографии [16]. К числу законов, открытых Е. С. Федоровым, принадлежит также закон проективности кристаллографических комплексов, устанавливающий соответствие между гранями и ребрами кристаллов разных сингоний. Непосредственным поводом к установлению этого закона послужили труды Федорова по выработке рациональных приемов вычисления кристаллов [17]. В последующих его работах этот закон нашел применение в разработке теории правильной (федоровской) установки кристаллов. Закон проективности опять-таки выводится из теории параллелоэдров, согласно которой все структуры кристаллов рассматриваются как результат однородных деформаций четырех идеальных типов параллелоэдров. Тем самым закон проективности выражает геометрические соотношения в кристаллах разных сингоний.

По словам самого Е. С. Федорова, «однозначная связь выражается внешним образом в возможности соответственным образом придавать одинаковые символы» [18, с. 106]. Следовательно, соответственные формы кристаллов различных сингоний могут выражаться одинаковыми символами. Закон проективности кристаллографических комплексов приводит к значительному упрощению кристаллографических вычислений, особенно для кристаллов низших сингоний. На основании этого закона Федоровым был разработан изящный метод вычисления кристаллов — метод проективных символов.

Следующим законом геометрической кристаллографии, открытым Е. С. Федоровым, является закон эллипсоида сингонии. Как и закон проективности, он основывается на федоровских представлениях о кристаллической структуре. Тем самым он тесно связан с теорией параллелоэдров, теорией однородных деформаций и законом проективности кристаллических комплексов.

Сущность закона эллипсоида можно пояснить следующим образом. Идеальные параллелоэдры со вписанными в них шаровыми поверхностями могут быть переведены посредством однородных деформаций в любые другие параллелоэдры. При этом шар превращается в эллипсоид вращения или трехосный эллипсоид.

Согласно Е. С. Федорову, «закон эллипсоида утверждает, что геометрические свойства комплекса всякого данного кристалла находят выражение в особом, для него характерном эллипсоиде» [19, с. 113]. Практически закон эллипсоида «дает в руки средство определять соответствие между гранями и ребрами комплекса в каких угодно кристаллах» [18, с. 106]. Последнее следует из того, что в случае шара (кубическая сингония) грани кристаллического комплекса однозначно связаны с перпендикулярными к ним ребрами.

Все эти замечательные обобщения легли в основу построения кристаллохимического анализа Федорова. Классификация кристаллических веществ, вошедших в монументальные таблицы «Царства кристаллов» («Das Kristallreich»), всецело базируется на параллелоэдрах и выводящихся из них пространственных решетках четырех типов — гексаэдрической

(примитивной), октаэдрической (центрированной), додекаэдрической (центрогранной) и призматической (гексагональной). Весь мир кристаллов подчинен здесь единой схеме с переходами, вызванными однородными деформациями идеальных решеток!

О том, какое впечатление произвела в свое время федоровская классификация на ученых, свидетельствует цитата из статьи Б. П. Орелкина и Г. В. Пигулевского: «Кристаллохимический метод является одним из следствий установления Е. С. Федоровым естественной системы царства кристаллов. Колоссальное значение этой системы выяснится, если мы обратим наше внимание на биологические науки. . . Только после работ Дарвина и Уоллеса была создана естественная классификация, основанная на единстве происхождения всех организмов. В мертвой природе — в царстве кристаллов — по-прежнему господствовали схоластические воззрения. . . О естественной классификации не могло быть и речи, так как не было основного фундамента, на котором можно было ее построить. Только работами Е. С. Федорова это было достигнуто. Таким фундаментом, на котором он выстроил величественное здание естественной классификации кристаллического царства, был закон выполнения пространства, данный в 1885 г. Этим законом Е. С. Федоров в самой общей форме решил вопрос о всех возможных случаях выполнения пространства многогранниками» [20, с. 151, 152]. Кончается статья знаменательной фразой: «Таким образом, благодаря гениальным работам Евграфа Степановича Федорова мы имеем новое могущественное орудие в деле познания природы» [20, с. 160].

Как известно, в кристаллохимическом анализе дан строго систематический ход определения вещества по его кристаллографическим формам. В его основу положено схематизированное представление о внутреннем строении кристаллов, сведенное к его решетчатому строению с четырьмя вышеупомянутыми типами решеток. Тип решетки определялся по статистической характеристике огранения, сравниваемого с теоретически вычисленными последовательностями плотностей соответственных плоских сеток (согласно закону Браве, наиболее важные по частоте встречаемости и развитые грани кристаллов соответствуют наиболее плотным сеткам ихрешеток).

Плодом разработки метода кристаллохимического анализа явились грандиозные таблицы «Царство кристаллов», где каждому веществу дана единая эталонная характеристика кристалла с его важнейшими формами и угловыми величинами (символ комплекса). Такая модель должна была удовлетворять как статистике внешнего ограничения, так и последовательности теоретически вычисленных плотностей важнейших сеток предполагаемой решетчатой структуры (напомним, что работа над кристаллохимическим анализом велась до открытия дифракции рентгеновских лучей на кристаллах и разработки методов рентгеноструктурного анализа).

Гигантский научный подвиг Е. С. Федорова, сумевшего подвести под единую геометрическую схему весь природный «хаос» бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. «Царство кристаллов» является незыблемым памятником и конечной вершиной классической федоровской кристаллографии.

Следует отметить, что использовавшаяся Е. С. Федоровым для определения типа структуры кристалла единственная возможная в то время морфологическая характеристика кристалла не всегда приводила его к правильным выводам, поскольку она во многом зависит не только от структуры, но и от условий кристаллизации.

Кроме того, позднее (в 1932 г.) зарубежными кристаллографами И. Д. Х. Доннеем и Д. Харкером было показано [21], что при определении морфологической важности граней следует учитывать поправку, вносимую в ретикулярную плотность грани такими элементами пространственной симметрии, как винтовые оси и плоскости скользящего отражения, что во времена Е. С. Федорова сделать было невозможно.

Говоря о работах Е. С. Федорова, связанных с кристаллохимическим анализом, следует отметить, что ученый отошел в них от своих выводов правильных систем фигур, ограничившись лишь схемами решеток, отвечающих подгруппам чистых трансляций. Исторический переворот в кристаллографии, связанный с открытием в 1912 г. дифракции рентгеновских лучей, подтвердил основные положения федоровской теории структуры кристаллов. Вместе с тем, первые расшифровки простейших реальных структур, осуществленные путем рентгеноанализа (1912—1914 гг.), показали, в чем состоит отличие реальных структур от прежних схематических построений.

По поводу первых рентгеновских исследований строения кристаллов Е. С. Федоров писал: «Теория, которая первоначально была положена в основу кристаллохимического анализа, исходила из допущения, что на кристаллическое вещество можно смотреть как на одну единственную пространственную решетку, узлы которой представляют центры тяжести некоторой группы атомов, представляющих собой кристаллическую частицу. . . Исследование кристаллов *X*-лучами, с одной стороны, блестяще подтвердило все основные построения теории структуры кристаллов (что дало яркое доказательство значения человеческого ума в области точного предвидения), но, с другой стороны, заставило изменить некоторые из них, казалось бы имеющие существенное значение. Оказалось, что на кристаллы никоим образом нельзя смотреть как на простые пространственные решетки частиц, так как каждый разряд атомов образует самостоятельные решетки» [22, с. 161—163].

Изучение результатов первых расшифровок конкретных кристаллических структур сразу же и подтвердило положение Е. С. Федорова о подчиненности всех возможных структур 230 пространственным группам. Уже в статье «Первое констатирование опытным путем асимморфной системы» (1914 г.) Федоров подчеркивает это обстоятельство.

Статья открывается следующими словами: «Применение рентгеновских лучей дало в руках В. Л. Брегга (и его отца) средства привести к заключениям, чрезвычайно важным для теории структуры кристаллов. Отчасти эти заключения неожиданны, по крайней мере в том отношении, что ожидалось видеть в точках правильных систем центры химических частиц, тогда как опыты названного ученого привели к выводу, что это центры атомов.

Благодаря этому в веществах простейшего состава получаются и с ециальные правильные системы точек, причем центры симметрии заняты отдельными атомами» [13, с. 54]. Далее Федоров указывает на приоритет своего вывода пространственных групп и на его недооценку учеными кругами того времени: «Не могу воздержаться от заявления, что я никак не думал дожить до действительного определения расположения атомов, предусмотренных в указанных мной сочинениях. В письме к проф. Гроту я писал, что, пожалуй, детальные применения систем, предусмотренных в этих сочинениях, начнут совершаться еще через 100 лет. В 1891 г. упомянутое русское сочинение, предусматривающее возможные расположения атомов или, скорее, законы этих расположений, я представил в Имп. СПб. Академию наук на соискание Макарьевской премии того года, но оно не только не удостоилось самой премии, но найдено не заслуживающим внимания и даже не попало в длинный официальный список работ, представленных на соискание этой премии» [13, с. 56].

Нам сейчас особенно важно отметить, что в статьях 1914—1917 гг., посвященных реальным кристаллическим структурам, Е. С. Федоров многократно ссылается на публикуемую в настоящем издании свою большую немецкую монографию «Reguläre Plan- und Raumtheilung». В популярной статье «Первые шаги в деле распознавания расположения атомов в кристаллах», приводя описания структур, он пишет: «Во всех случаях найденные расположения точек (атомов) оказались в числе тех, которые были предусмотрены в ученых трудах по кристаллографии. . . Например, расположение атомов в пирите предусмотрено в сочинении автора этой статьи «Симметрия правильных систем фигур», где оно значится в виде системы под № 92а, а несколько позже получило наиболее простое графическое изображение в сочинении «Reguläre Plan- und Raumtheilung» в табл. VII под символом $(25)\chi 1$, а в перечислении всех возможных структур значится в табл. VI под символом $25(\chi 1)$ (13 III)» [23, с. 346].

Основываясь на данных этой монографии, Е. С. Федоров в статьях «Результаты первой стадии экспериментального исследования структуры кристаллов» (1916 г.), «Основной закон кристаллохимии» (1916 г.) и в других приводит симметрийные формулы расшифрованных структур и предлагает наиболее наглядные способы их моделирования с помощью параллелоэдров.

Наиболее подробное изложение такого подхода дано в большой статье «Правильные системы точек и структуры уже исследованных кристаллов», опубликованной посмертно в 1957 г. [24]. Рукопись этой работы сохранилась в архиве Е. С. Федорова. Под заголовком статьи приводится текст: «Доложено 4 апреля 1916 г.».

Начинается статья так: «В сочинении „Reguläre Plan- und Raumtheilung“, в котором не только приведены все правильные системы точек (впервые выведенные в «Симметрии правильных систем фигур»), но и разделение пространства на параллелоэдры с разной симметрией (что в ближайшей степени соответствует всевозможным расположениям атомов в кристаллах), впервые элементы симметрии разложены на отдельные операции, условно отмечаемые цифрами.

Таким образом, результат работы свелся к разложению параллелоэдров с цифровыми отметками на гранях, а эти цифры выражают, какие операции претерпевает параллелоэдр для совмещения со смежными по данной грани» [24, с. 104]. Текст работы разделяется на три части.

В первой Федоров описывает главные результаты монографии «Reguläre Plan- und Raumtheilung». Способ изображения и трактовки правильных систем точек он предлагает принять в качестве основы для описания реальных кристаллических структур. Расшифровка реальных структур кубических кристаллов вызвала необходимость несколько упростить такие обозначения. Этот новый способ описания кубических структур рассматривается в первой части работы. Возможные виды правильных систем Федоров предлагает изображать посредством параллелоэдров с цифрами на их гранях.

Вторая часть статьи посвящена краткому обзору симметрии пространственных групп.

Третий раздел содержит описание ряда реальных структур, расшифрованных к тому времени с помощью рентгеноанализа (медь, хлористый натрий, флюорит, нашатырь, куприт, сфалерит, магнетит, хлорат натрия, кальцит, доломит, гематит, ильменит, цинкит, кварц). Предлагаемый им метод наглядного изображения (моделирования) структур уясняется из слов самого автора: «Теперь обратимся к нормальному изображению структуры уже исследованных кристаллов, понимая под этим изображением изображение параллелоэдра наименьшего объема с показанием в нем как элементов его внутренней симметрии, так и симметрии связи (со смежными на грани параллелоэдрами) и выражая последнюю числами, как было объяснено в начале статьи. Ради большей отчетливости показано и действительное расположение атомов; заимствовано это из статей: 1) „Результаты первой стадии экспериментального исследования структуры кристаллов" и 2) „Основной закон кристаллохимии"» [24, с. 132].

Как видим, и в этом одном из самых последних произведений Е. С. Федорова параллелоэдры играют важнейшую роль, позволяя наглядно моделировать как правильные системы точек с их законами симметрии, так и конкретные структуры реальных кристаллов.

Итак, учение о параллелоэдрах, неразрывно связанное с теорией правильных систем фигур, красной нитью проходит буквально через все творчество Е. С. Федорова, начиная с его первых выступлений в Минералогическом обществе и кончая последней большой теоретической работой, не увидевшей свет при жизни ее автора.

Все вышеизложенное свидетельствует также и об огромном значении впервые публикуемой в настоящем издании в переводе на русский язык монографии «Reguläre Plan- und Raumtheilung», занимающей центральное место в творчестве великого кристаллографа и сыгравшей ведущую роль при становлении современной структурной кристаллографии.

Следует отметить, что впервые приведенные в данном сочинении аналитические и графические методы описания типов пространственных структур сохраняют в полной мере свое значение и в современной кристаллографии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Б. Н. Е. С. Федоров как геометр. — Тр. Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, 1956, т. 10, с. 5—12.
2. Шафрановский И. И. Кристаллографические представления И. Кеплера и его трактат «О шестиугольном снеге». М., 1971. 24 с.
3. Гаюи Р. Ж. Структура кристаллов. Сер. «Классики науки». М.—Л., 1962. 176 с.
4. Ломоносов М. В. Полн. собр. соч., т. 2. М.—Л., 1951, 726 с.
5. Федоров Е. С. Симметрия правильных систем фигур. — Зап. МО, 1891, т. 28, с. 1—146.
6. Sohncke L. Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig, 1879. 248 S.
7. Федоров Е. С. Из итогов тридцатипятилетия. М., 1904, с. 1—15.
8. Зап. МО, 2 сер., 1883, ч. 18, с. 181—283.
9. Франк-Каменецкий В. А., Шафрановский И. И. Начало творческого пути Е. С. Федорова. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955, с. 113—124.
10. Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. — Зап. МО, 2 сер., 1885, ч. 21, 277 с.
11. Михеев В. И., Шафрановский И. И. Кристаллографические законы, открытые и сформулированные Е. С. Федоровым — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955, с. 96—112.
12. Федоров Е. С. Симметрия и структура кристаллов. Серия «Классики науки». М., 1949. 630 с.
13. Федоров Е. С. Первое констатирование опытным путем асимморфной правильной системы. — Зап. Горн. ин-та, 1914, т. 5, вып. 3. с. 54—56.
14. Федоров Е. С. Критический пересмотр форм кристаллов минерального царства (материалы по молекулярной статике однородных тел). — Зап. АН по физ-мат. отд., 1903, т. 14, № 2, с. 1—148.
15. Федоров Е. С. Один из самых общих законов кристаллизации. — Изв. АН, 5-я сер., 1903, т. 18, № 4, с. 155—160.
16. Франк-Каменецкий В. А., Шафрановский И. И. Закон кристаллографических пределов и принцип плотнейших упаковок. — Кристаллография, 1961, т. 6, вып. 6, с. 892—900.
17. Федоров Е. С. Этюды по аналитической кристаллографии — Горн. журн., 1886, т. 1, с. 395—425.
18. Федоров Е. С. Курс кристаллографии. СПб., 1901, 438 с.
19. Федоров Е. С. Некоторые следствия из закона эллипсоида сингонии. — Изв. АН, 5 сер., 1904, т. 21, № 2, с. 113—140.
20. Орелкин Б., Пигулевский Г. Применение кристаллохимического метода Е. С. Федорова в научной и практической работе. — В кн.: Новые идеи в химии. Сб. № 5. Кристаллохимический анализ. СПб., 1914, с. 151—160.
21. Donney J. D. H., Harker D. A new law of crystal morphology extending the law of Bravais. — Amer. Mineralog., 1937, v. 22, p. 446—467.
22. Федоров Е. С. Предусматривание кристаллизации по расположению атомов. — Зап. Горн. ин-та, 1917, т. 6, вып. 2, с. 161—163.
23. Федоров Е. С. Первые шаги в деле распознавания атомов в кристаллах. Природа, 1915, март, с. 339—350.
24. Федоров Е. С. Правильные системы точек и структуры уже исследованных кристаллов. — В кн.: Рукописные материалы Е. С. Федорова в Архиве АН СССР. М.—Л., 1957, с. 104—136.

Б. Н. ДЕЛОНЕ, Р. В. ГАЛИУЛИН, М. И. ШТОГРИН

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРАВИЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Федоровская теория правильных разбиений плоскости и пространства

«Regulare Plan- und Raumtheilung» — одна из самых красивых и глубоких работ по геометрической теории правильных разбиений. В этой работе [1] Е. С. Федоров дает обширную классификацию разбиений трехмерного евклидова пространства на параллелоэдры. В построенной им классификации учитываются: 1) тип разбиения пространства на параллелоэдры, 2) абстрактное устройство федоровской группы разбиения и 3) связь элементов симметрии федоровской группы с геометрией самого разбиения. Для всех разбиений трехмерного евклидова пространства на параллелоэдры Е. С. Федоров находит все транзитивные их федоровские группы.

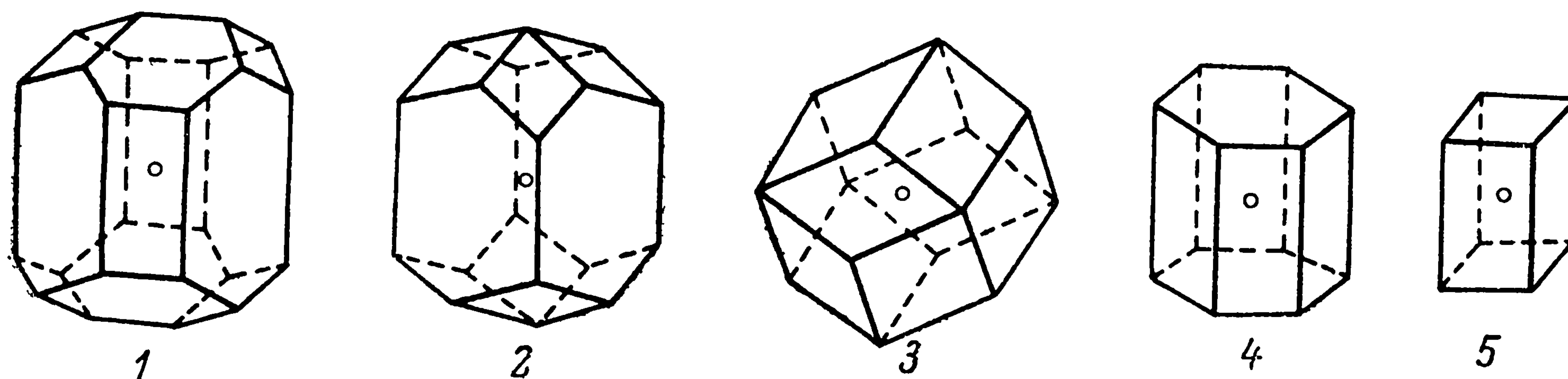


Рис. 1. Пять типов трехмерных параллелоэдров.

Все трехмерные параллелоэдры по своему комбинаторно-топологическому устройству делятся на 5 типов [2] (рис. 1). Но в своей знаменитой работе [1] Е. С. Федоров делит все параллелоэдры лишь на 4 типа: III — трипараллелоэдры, IV — тетрапараллелоэдры, VI — гексапараллелоэдры и VII — гектапараллелоэдры. Два додекаэдра — параллелограмматический и удлиненный (который мысленно можно представить как параллелограмматический додекаэдр с особой зоной) — Е. С. Федоров

относит к одному и тому же типу. Это он объясняет тем, что разбиения на параллелограмматические и удлиненные додекаэдры имеют одинаковые распределения слоев и колонн.

Указанные 4 типа федоровских параллелоэдров — это так называемые типы смежности [3].

В каждом типе смежности особо выделяется простой параллелоэдр, обладающий наивысшей симметрией: один с гексагональной голоэдрией — гексагональная призма и три с кубической голоэдрией — куб, ромбододекаэдр (гранатоэдр) и федоровский кубооктаэдр. Эти четыре параллелоэдра мы будем называть стандартными параллелоэдрами, а соответствующие им разбиения — стандартными разбиениями. Все транзитивные федоровские группы стандартных разбиений являются подгруппами четырех федоровских групп: $P\frac{6}{m}m$, $Pm3m$, $Fm3m$, $Im3m$. Ни одна из четырех последних групп не является транзитивной группой чужого стандартного разбиения. Отметим также, что указанные четыре полные группы стандартных разбиений абстрактно неизоморфны. Они соответствуют максимальным арифметическим голоэдриям [4].

Соединив отрезками центры любых двух смежных (т. е. имеющих общую грань) параллелоэдров какого-либо данного разбиения, мы получим так называемый каркас смежности. Существуют четыре различных стандартных каркаса смежности, которые соответствуют стандартным разбиениям на параллелоэдры. Любой другой каркас смежности, соответствующий произвольному разбиению на параллелоэдры, можно при помощи некоторого аффинного преобразования превратить в стандартный каркас смежности.

Два разбиения на параллелоэдры с данными транзитивными их федоровскими группами Е. С. Федоров относит к одному классу [1], если эти федоровские группы аффинно-одинаково связаны с каркасами смежности рассматриваемых разбиений. Другими словами, если существует аффинное преобразование, при котором каркас смежности одного разбиения переходит в каркас смежности другого и все движения одной федоровской группы переходят (аффинно трансформируются) в движения другой, то такие два разбиения на параллелоэдры с данными транзитивными их федоровскими группами Е. С. Федоров относит к одному классу. Все такие классы могут быть представлены на четырех стандартных разбиениях. Отыскание всех классов связано с реальным перебором всех транзитивных групп четырех стандартных разбиений, являющихся подгруппами полных групп $P\frac{6}{m}mm$, $Pm3m$, $Fm3m$, $Im3m$ этих разбиений.

Для наглядности каждый класс изображается [1] одним из четырех стандартных параллелоэдров с указанными на нем группой симметрии параллелоэдра и элементами симметрии связи. Указанные элементы симметрии являются образующими рассматриваемой группы разбиения на параллелоэдры.

Е. С. Федоров называет некоторую точку главной точкой пространственной группы, если соответствующая ей правильная система точек является решеткой. Основываясь на своей классификации [1], ученый открыл удивительный факт: главные точки имеются у всех 230 пространственных групп, за исключением одной лишь энантиоморфной пары $P4_132$ и $P4_332$.

Это заключение Е. С. Федорова о главных точках легко подтвердить. Начнем с групп $P4_132$ и $P4_332$. Предположим, что группа $P4_132$ имеет главную точку. Тогда все точки, эквивалентные главной, составляют решетку. Эта решетка совмещается с собой всеми движениями группы $P4_132$ и, таким образом, имеет точечную группу симметрии 32. Значит, решетка эта кубическая — либо простая, либо объемноцентрированная, либо центрогранная. Но даже в полной группе этой кубической решетки — либо $Pm3m$, либо $Im3m$, либо $Fm3m$ — любая ось 3-го порядка проходит через узел решетки. Таким образом, наша главная точка обязана лежать на оси 3-го порядка группы $P4_132$. Как это следует из одного лишь учета взаимного расположения эквивалентных точек на отдельной оси 3-го порядка группы $P4_132$, главная точка могла бы находиться на этой оси самое большее в трех конкретных положениях: в двух неэквивалентных точках со стационарными группами 32, а также посредине между ними. Однако непосредственная проверка показывает, что правильная система точек, соответствующая любому из трех указанных конкретных положений, не является решеткой. Таким образом, группа $P4_132$, а вместе с ней и зеркальная ей группа $P4_332$, не имеет главной точки. Все остальные федоровские группы главные точки имеют. Так, например, главными точками являются: точка $(^1/_4, 0, 0)$ для группы $Fdd2$, $(^3/_8, {}^3/_8, {}^3/_8)$ для $Fddd$, $Fd3$, $F4_132$ и $Fd3m$, $(^1/_4, {}^1/_4, 0)$ для $I4_1$ и $I4_1md$, $(0, 0, {}^1/_4)$ для $I4_1/a$, $I4_122$, $I\bar{4}2d$ и $I4_1/amd$, а точка $(0, 0, 0)$ — для всех оставшихся 217 групп (см. интернациональные таблицы).

Найденный Е. С. Федоровым 1591 класс может быть использован для наглядного геометрического описания (представления) всех пространственных групп, обладающих главными точками, и всех соответствующих им правильных систем точек. Все такие группы всеми возможными способами представлены в [1] как транзитивные группы разбиений на параллелоэдры.

Само построение классификации Е. С. Федорова [1] служит изящным и наглядным выводом всех пространственных групп, обладающих главными точками. Этот вывод дает почти все федоровские группы — все, за исключением одной энантиоморфной пары.

Забегая вперед, отметим, что для правильных разбиений евклидовой плоскости имеется всего 93 сорта (см. § 3), из них 56 сортов связаны с разбиениями плоскости на параллелогоны. В первой части своей работы [1] Е. С. Федоров указал только 54 таких сорта.

§ 2. Общие понятия теории правильных разбиений

1. Если некоторые тела расположены в пространстве так, что всякая точка пространства принадлежит хотя бы одному из тел (как внутренняя точка либо как точка границы) и тела эти попарно не имеют общих внутренних точек, то такая совокупность тел называется р а з б и е н и е м пространства. Если эти тела выпуклые, то они, очевидно, многогранники. Если эти многогранники смежны только по целым граням, то разбиение называется н о р м а л ь н ы м.

Разбиение называется п р а в и л ь н ы м, если, какие два тела разбиения A и B ни взять, существует движение пространства, переводящее тело A в тело B, при котором все разбиение переходит в себя (совмещается с собой). Все тела правильного разбиения, очевидно, конгруэнтны. По терминологии Е. С. Федорова они называются с т е р е о-э д р а м и. В частности, если все стереоэдры разбиения ориентированы параллельно, они называются п а р а л л е л о э д р а м и. Для плоских правильных разбиений соответственно употребляются названия п л а н и г о н ы и п а р а л л е л о г о н ы.

2. Совокупность всех движений, совмещающих правильное разбиение с собой, очевидно, составляет группу. Ее называют ф е д о р о в с к о й г р у п п о й.

Ф у н д а м е н т а л ь н о й о б л а с т ь ю группы движений G называется совокупность точек пространства, таких, что никакие две из них не могут быть переведены друг в друга каким-либо движением группы G и что всякая точка пространства некоторым движением G может быть переведена в точку этой совокупности.

Если федоровская группа один раз транзитивна относительно стереоэдров правильного разбиения, т. е. отдельный стереоэдр является ее фундаментальной областью, то такая группа называется о с н о в н о й группой данного разбиения. Если же группа транзитивна более чем один раз, т. е. стереоэдр содержит несколько фундаментальных областей, — то такая группа называется н е о с н о в н о й.

Примеры показывают, что существуют правильные разбиения, не имеющие никакой основной группы. Такими являются, например, икосаэдрическое и триаконтаэдрическое разбиения сферы. С другой стороны, всякое нормальное правильное разбиение евклидовой плоскости имеет хотя бы одну основную группу. Так, например, известное разбиение на правильные шестиугольники, полная группа которого, очевидно, неосновная, имеет 7 основных групп, среди которых 5 абстрактно неизоморфны.

3. Размножив некоторую точку A пространства всеми движениями федоровской группы G, мы получим так называемую п р а в и л ь н у ю с и с т е м у т о ч е к $\{A_G\}$. Всякая правильная система точек, очевидно, удовлетворяет следующим трем условиям: 1) расстояние между любыми ее точками не меньше некоторого фиксированного положительного числа r, 2) внутри шара некоторого фиксированного радиуса R, где ни взять в пространстве его центр, содержится хотя бы одна точка этой системы

и 3) существует движение пространства, которое любую точку этой системы переводит в любую другую ее точку и совмещает всю систему с собой.

Совокупность точек пространства, удовлетворяющих первым двум из этих трех условий, мы будем называть (r,R)-системой точек. Из этих двух условий (дискретности и однородности) вовсе не следует правильность рассматриваемой системы точек, так как отсутствует необходимое для этого третье условие. Поэтому понятие (r,R)-системы точек является более общим, нежели понятие правильной системы точек.

Именно понятие (r,R)-системы точек служит нам отправным пунктом для определения столь важных в кристаллографии понятий, как разбиение $\{L\}$ и разбиение $\{D\}$.

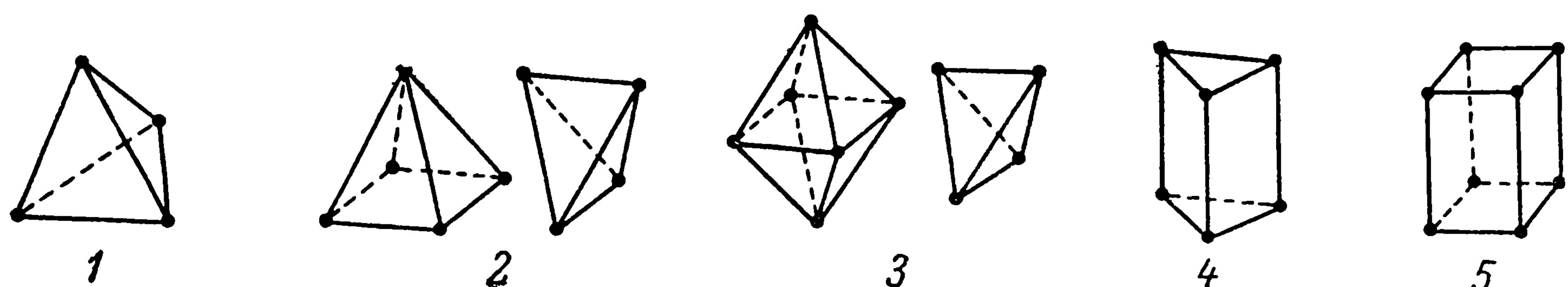


Рис. 2. Пять типов разбиения $\{L\}$ для трехмерных решеток.

4. Рассмотрим шар, увеличивающийся, уменьшающийся и как угодно передвигающийся между точками (r,R)-системы, на который наложено только одно условие — не иметь внутри себя точек данной (r,R)-системы. Такой шар называется пустым.

Начнем увеличивать радиус пустого шара, оставляя его центр на месте, пока шар не наткнется своей поверхностью на какие-нибудь точки (r,R)-системы (это всегда будет, потому что наш шар не может иметь радиуса, большего чем R). Если эти точки лежат не n-мерно, то можно, сохраняя условие, чтобы они лежали на поверхности нашего шара, увеличивать далее его радиус, отодвигая его центр от того линейного подпространства, в котором лежат эти точки. При таком увеличении радиуса в силу условия R шар наткнется на дальнейшие точки (r,R)-системы, уже не лежащие в этом линейном подпространстве. Продолжая этот процесс, получим, наконец, пустой шар, на поверхности которого лежит n-мерная совокупность точек (r,R)-системы. Пустой шар, на поверхности которого имеется пространственная совокупность точек (r,R)-системы, назовем шаром (L). Выпуклую оболочку всех точек (r,R)-системы, расположенных на поверхности шара (L), назовем многогранником L. Все многогранники L данной (r,R)-системы точек, как это следует из [5], составляют нормальное разбиение $\{L\}$. Именно этим разбиением описываются конфигурации пустот рассматриваемой (r,R)-системы точек.

Разбиения $\{L\}$ для трехмерных решеток делятся на пять типов. Все типы многогранников L для трехмерных решеток представлены на рис. 2.

5. Многогранником D, или областью Дирихле (Дирихле—Вороного), некоторой точки O какой-либо (r,R)-системы называется со-

вокупность всех точек пространства, каждая из которых отстоит от точки O не дальше, чем от любой другой точки рассматриваемой (r,R)-системы. Область Дирихле точки O можно построить так: соединить точку O прямолинейными отрезками со всеми другими точками (r,R)-системы и через середину каждого из них провести перпендикулярную ему $(n-1)$-мерную плоскость. Тогда пересечение полупространств, содержащих точку O, и будет областью Дирихле точки O. Это выпуклый многогранник с конечным числом граней.

Многогранники D всех точек (r,R)-системы образуют нормальное разбиение $\{D\}$ пространства. Любая данная (r,R)-система однозначно определяет связанное с ней разбиение $\{D\}$. Но, как показывают примеры, метрически различные (r,R)-системы могут определять одно и то же разбиение $\{D\}$.

Заметим теперь, что для любой федоровской группы G найдется разбиение, для которого она является основной группой. Таким разбиением, например, будет разбиение Дирихле, построенное для правильной системы точек $\{O_G\}$, где в качестве O взята точка общего положения относительно группы G.

Все комбинаторно-различные многогранники Дирихле для трехмерных решеток (параллелоэдры Дирихле) изображены на рис. 1.

6. Два разбиения пространства называются комбинаторно-изоморфными, если можно тела первого из них так взаимно-однозначно сопоставить с телами второго, $(n-1)$-мерные грани первого — с $(n-1)$-мерными гранями второго и т. д., ребра первого — с ребрами второго и, наконец, вершины первого — с вершинами второго, чтобы сохранились все инцидентности в обе стороны.

Если какое-либо разбиение имеет группу G комбинаторно-изоморфных отображений его на себя, транзитивную относительно его тел, то это разбиение называется комбинаторно-правильным.

Два разбиения пространства называются комбинаторно-дуальными, если можно так взаимно однозначно сопоставить тела первого из них с вершинами второго, $(n-1)$-мерные грани первого — с ребрами второго и т. д., и, наконец, вершины первого — с телами второго, чтобы сохранились все инцидентности в обе стороны.

Очевидно, что разбиения $\{L\}$ и $\{D\}$, построенные для какой-либо данной (r,R)-системы точек, дуальны друг другу. В частности, если одно из этих разбиений комбинаторно задано, то можно найти комбинаторное устройство другого.

Заметим, что некоторые фигуры допускают комбинаторно-дуальные отображения самих на себя. Эти отображения можно интерпретировать как операции шубниковской антисимметрии. Так, например, правильный трехмерный тетраэдр с этой точки зрения имеет шубниковскую группу антисимметрии 48-го порядка.

7. Введем еще одно важное понятие — сорт пары, которым мы не раз будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть задан некоторый комбинаторно-топологический объект S и не-

которая группа G комбинаторно-изоморфных отображений его на себя. Тогда (S, G) мы назовем парой. Две пары (S, G) и (S', G'), по определению [6], мы отнесем к одному и тому же сорту, если: 1) объекты S и S' комбинаторно-изоморфны, 2) группы G и G' абстрактно изоморфны и 3) группы G и G' одинаково действуют на объектах S и S'. Другими словами, если имеется комбинаторно-изоморфное отображение объекта S на объект S', которое действия группы G на объекте S переводит в действия группы G' на объекте S', то пары (S', G') и (S, G) мы относим к одному и тому же сорту.

Именно понятие сорта лежит в основе различных важных классификаций. Такими, например, являются классификации трехмерных решеток на 24 сорта Делоне, правильных разбиений плоскости на 93 сорта, простых форм кристаллов на широко известные 47 типов и 146 сортов Бокия [7] и т. т.

§ 3. Планигоны

1. Приступая к изложению общей теории планигонов, дадим описание всех комбинаторно-топологических типов правильных разбиений евклидовой плоскости.

Имеет место следующая теорема Шубникова [8]—Лавеса [9]: число сторон планигона может быть равно только 6, 5, 4 или 3, а циклы кратностей схождения планигонов в вершинах — только (3, 3, 3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 3, 4), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (4, 4, 4, 4), (3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (6, 6, 6), причем существует 11 очень простых разбиений плоскости на планигоны (которые мы будем называть стандартными), обладающие этими 11 циклами кратностей (рис. 3).

Подробное доказательство этой теоремы дано в [10], где при помощи так называемой основной леммы интегрального исчисления выводится уравнение

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=\frac{k}{2}-1,$$

связывающее число k сторон планигона с числами a_i планигонов разбиения, сходящихся во всех вершинах этого исходного планигона ($i=1, 2, \ldots, k$). Легко проверить, что все возможные целочисленные решения этого уравнения приводятся ниже.

k	$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$
6	(3, 3, 3, 3, 3, 3)
5	(3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4)
4	(3, 3, 6, 6), (3, 3, 4, 12), (3, 4, 4, 6), (4, 4, 4, 4)
3	(3, 12, 12), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 7, 42), (3, 10, 15), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10), (6, 6, 6)

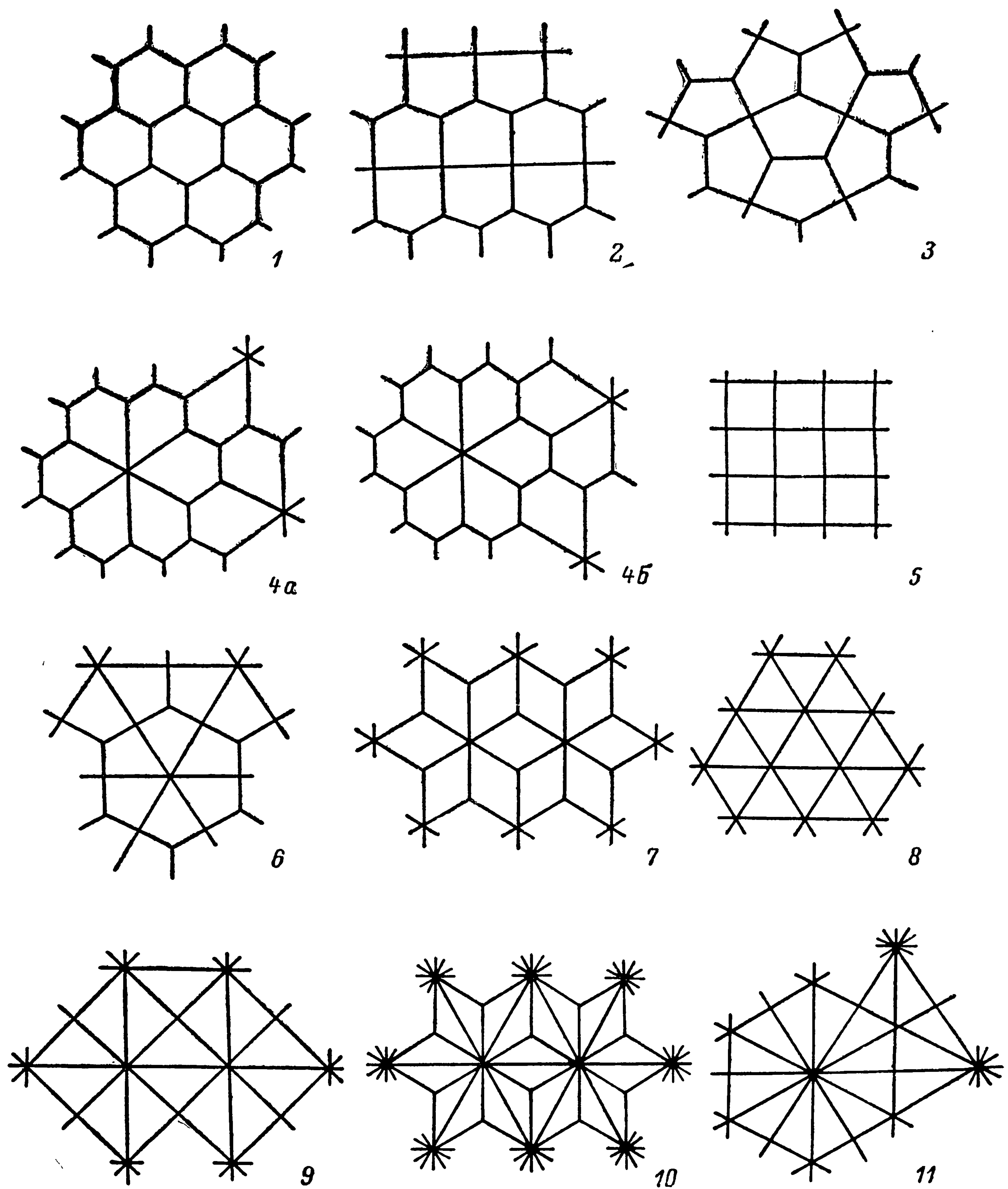


Рис. 3. Одиннадцать типов разбиений плоскости на стандартные планигоны.

Проверка показывает также, что семи подчеркнутым выше наборам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ не соответствуют никакие циклы кратности, так как невозможно разместить такие одинаковые циклы в вершине нечетной кратности. Оставшимся десяти наборам соответствуют 11 циклов кратности, фигурирующих в теореме Шубникова—Лавеса, о чем свидетельствуют 11 стандартных разбиений на планигоны (рис. 3).

2. Имеет место следующая теорема: комбинаторно-топологическое устройство всякого разбиения евклидовой плоскости на планигоны вполне задается циклом кратности вершин планигона.

Доказывается, что комбинаторно-изоморфное отображение планигона P'_0 произвольного разбиения $\{P'\}$ на планигон P_0 некоторого стандартного разбиения $\{P\}$, при котором сохраняются циклы кратности вершин и которое является одним из двух возможных таких отображений в случае цикла (3, 3, 3, 3, 6) и любым таким отображением в случае остальных 10 циклов, однозначно продолжается до комбинаторно-изоморфного отображения всего разбиения $\{P'\}$ на стандартное разбиение $\{P\}$. Таким образом, любое правильное разбиение евклидовой плоскости комбинаторно-изоморфно одному из одиннадцати стандартных разбиений: P_6, P_{5A}, P_{5B}, P_{5C}, P_{4A}, P_{4B}, P_{4C}, P_{3A}, P_{3B}, P_{3C}, P_{3D}.

Заметим, что в этом доказательстве вовсе не используется ни прямолинейность сторон, ни правильность разбиения в целом. По существу учитывается лишь то обстоятельство, что для всех многоугольников разбиения циклы кратности одинаковы. Но при этом предполагается, что эти циклы кратности взяты из одиннадцати вышеуказанных.

Забегая вперед, отметим также, что предлагаемый ниже метод исследования сортов для разбиений плоскости на планигоны является чисто комбинаторным. Этот метод дословно переносится на все комбинаторно-правильные разбиения плоскости с рассматриваемыми одиннадцатью циклами кратности. Для таких разбиений, взятых вместе с транзитивными группами комбинаторно-изоморфных отображений их на себя, мы вновь получаем 93 сорта (46 основных и 47 неосновных), речь о которых будет идти ниже. Таким образом, двумерная геометрическая кристаллография приобретает чисто комбинаторно-топологическое основание.

3. Рассмотрим произвольное разбиение на планигоны $\{P\}$ и какую-либо его основную группу F. Обозначим стороны планигона P вдоль по его обходу буквами a, b, c, . . ., проставленными внутри него против его сторон. В группе F имеется только одно движение, переводящее этот исходный планигон с проставленными в нем буквами в какой-либо другой. Поэтому во всех планигонах разбиения до бесконечности эти буквы будут расставлены одним, вполне определенным способом.

Пусть к стороне a исходного планигона прилегает другой планигон своей стороной, например, c. Тогда это обстоятельство мы запишем как $\underline{ac}$, если цикл сторон a, b, c, . . . второго планигона имеет ту же ориентацию, как у исходного, или как $\underline{a\bar{c}}$ в случае противоположной ориентации (такая формальная запись элемента симметрии связи оправдывается предлагаемым ниже комбинаторным методом). Выпишем эти значения для всех

букв исходного планигона, разместив их в одной скобке, например $[\underline{a\bar{c}}_4, \underline{b\bar{d}}_3, \underline{c\bar{a}}_4, \underline{d\bar{b}}_3, \underline{ee}_3]$, и назовем эту скобку **символом смежности разбиения**. Индексы, в данном случае (4, 3, 4, 3, 3), поставленные между соседними элементами символа, также относятся к символу. Они указывают, сколько всего планигонов сходится в той вершине исходного планигона, по которой смежны стороны (первые в соответственных элементах символа), между которыми стоит индекс. Для любого другого планигона, где бы ни взять его в разбиении $\{P\}$, очевидно, символ смежности разбиения будет тот же, что и для исходного планигона.

Отметим следующее важное свойство символа смежности, называемое условием обхода вокруг вершины. Пусть дан символ смежности, соответствующий данной расстановке букв a, b, c, . . . на сторонах исходного планигона. Рассмотрим все те планигоны разбиения, которые примыкают к какой-либо вершине исходного планигона. Пользуясь символом смежности, перенесем цикл букв a, b, c, . . . из исходного планигона на смежный с ним другой, из другого (полученной на нем расстановке букв a, b, c, . . . также соответствует рассматриваемый символ смежности) на третий и т. д. После полного обхода вокруг вершины мы вновь придем к исходному планигону. При этом на сторонах исходного планигона мы опять получим исходную расстановку букв a, b, c, . . .

4. Рассмотрим некоторую федоровскую группу G, транзитивную относительно планигонов разбиения $\{P\}$. Каждое движение группы G естественно определяет комбинаторно-изоморфное отображение объекта $S=\{P\}$ на себя. Поэтому мы можем говорить о понятии сорта пары (S, G).

Если группа G совпадает с некоторой основной группой F разбиения $\{P\}=S$, то сорт пары (S, G) мы будем называть основным. Очевидно, имеет место следующий простой критерий: два разбиения на фундаментальные планигоны принадлежат одному и тому же основному сорту тогда и только тогда, когда эквивалентны их символы смежности (т. е. оба символа смежности могут быть записаны одной и той же скобкой).

Задача нахождения всех символов смежности решается чисто комбинаторно, а именно: в виде индексов выпишем какой-либо из одиннадцати циклов кратности, расширив скобки так, чтобы остались промежутки для записи элементов символа смежности. На первых местах элементов поставим буквы a, b, c, . . ., на вторых — те же буквы, но, может быть, в другом порядке; над второй буквой поместим (или не поместим) черточку; заполнять вторые места надо так, чтобы вместе с каждым элементом в скобке находился и обратный ему элемент (например, $\underline{a\bar{c}}$ и $\underline{c\bar{a}}$).

Теперь осталось проверить, удовлетворяет ли выписанная скобка условиям обхода вокруг вершин, если ее условно принять за символ смежности. Все такие проверки можно осуществлять на планигонах стандартного разбиения. При этом не нужно брать все разбиение в целом. Достаточно взять исходный его планигон, а также все те планигоны разбиения (с указанием кратностей схождения в их вершинах!), которые смежны с исходным хотя бы по одной вершине.

Если выписанная скобка не удовлетворяет условиям обхода вокруг вершин исходного планигона, то она, безусловно, не является символом смежности ни для одной из его основных групп. Оказалось, что всего лишь 46 неэквивалентных скобок удовлетворяют этим условиям. Все они являются символами смежности, о чем свидетельствуют 46 основных сортов [10] разбиений плоскости на фундаментальные планигоны, представленные в табл. 1. Заметим, что в таблице использована сокращенная запись символов смежности.

Весьма примечательно, что метрические условия, необходимые и достаточные для того, чтобы разбиение вместе с основной его группой было данного сорта, совершенно просты и в каждом сорте описываются по-своему. Поэтому введение сортов вполне решает вопрос о метриках разбиений плоскости на планигоны.

5. Пусть группа G, транзитивная относительно планигонов разбиения $\{P\}$, не является основной группой для этого разбиения. Тогда стационарная подгруппа планигона P не тривиальна. Разобьем планигон P на части, эквивалентные относительно его стационарной группы. Отдельная такая часть планигона P, которую мы обозначим через Q, очевидно, является фундаментальной областью группы G. Размножив эту часть Q всеми движениями группы G, мы получим новое, более дробное разбиение $\{Q\}$, для которого группа G уже является основной. Так от неосновного сорта мы придем к некоторому основному.

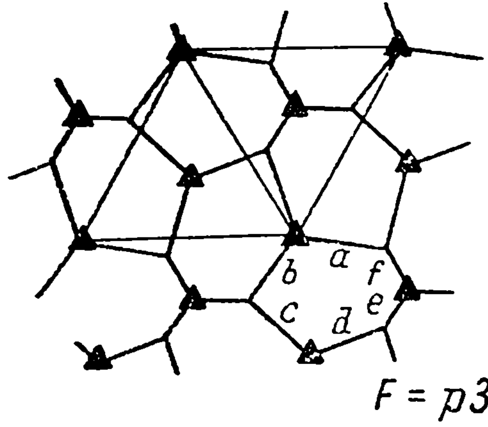
И наоборот, каждый неосновной сорт разбиения может быть получен из некоторого основного сорта операцией объединения, обратной этой. Последнее обстоятельство позволило посредством табл. 1 найти все неосновные сорта планигонов. Их оказалось 47 (см. также [11]).

В табл. 2 для каждого неосновного сорта изображен один планигон разбиения и указаны те элементы симметрии федоровской группы, которые расположены в пределах этого планигона.

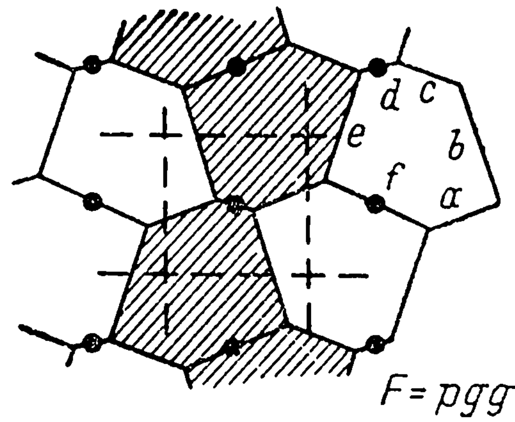
6. В табл. 1 и 2 показаны все мыслимые правильные разбиения евклидовой плоскости вместе со всеми транзитивными их федоровскими группами. В них указаны: 1) комбинаторно-топологическое устройство правильного разбиения, 2) абстрактное устройство транзитивной его федоровской группы, 3) действия этой группы на разбиение (связь группы с разбиением). Кроме того, в табл. 1 указаны метрические соотношения между параметрами планигона, в табл. 2 аналогичные соотношения видны непосредственно из рисунков. Имеется только 93 сорта — 46 основных и 47 неосновных. В общей сложности 56 из 93 сортов связаны с разбиениями P_6 и P_{44}. Эти и только эти разбиения служили объектом исследования первой части работы [1]. Для них (разбиений на трипараллелогоны и дипараллелогоны) Е. С. Федоров нашел только 54 сорта.

7. Сопоставляя между собой табл. 1 и 2, легко убедиться в том, что любое разбиение табл. 2 совпадает с некоторым разбиением табл. 1 (разбиение табл. 2, вообще говоря, есть частный случай разбиения табл. 1). Следовательно, любое разбиение евклидовой плоскости на планигоны обладает хотя бы одной основной федоровской группой. Таким образом,

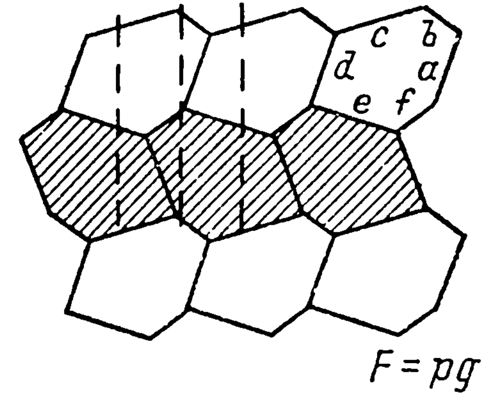
$P_{6,1}$ $[\underline{ab}\ \underline{cd}\ \underline{ef}]$ $a=b$ $c=d$ $e=f$ $\hat{ab}=\hat{cd}=ef=120^\circ$



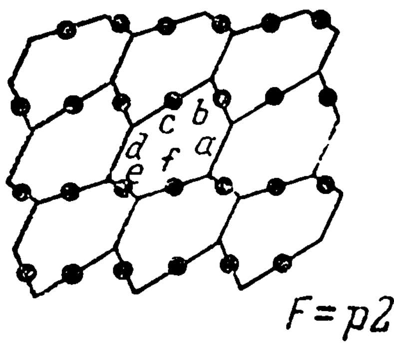
$P_{6,2}$ $[\underline{a\bar{c}}\ \underline{b\bar{e}}\ \underline{dd}\ \underline{ff}]$ $a=c$ $b=e$ $\hat{ab}+\hat{cd}+\hat{de}=360^\circ$



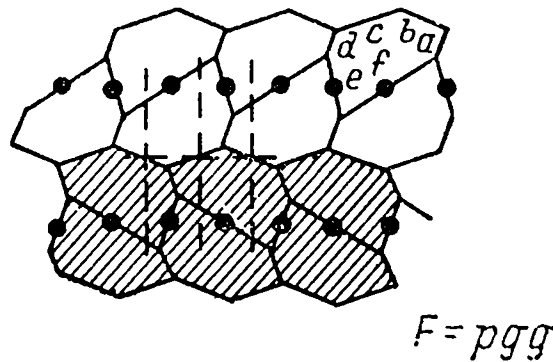
$P_{6,3}$ $[\underline{ad}\ \underline{b\bar{f}}\ \underline{c\bar{e}}]$ $a=\parallel d$ $b=f$ $c=e$



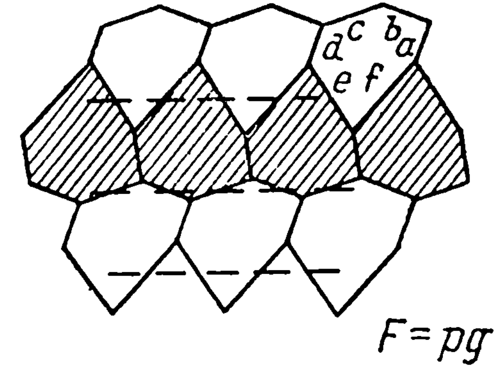
$P_{6,4}$ $[\underline{ad}\ \underline{bb}\ \underline{cc}\ \underline{ee}\ \underline{ff}]$ $a=\parallel d$



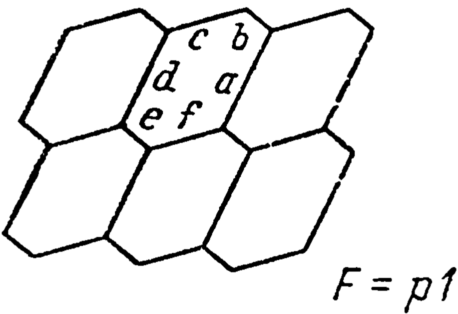
$P_{6,5}$ $[\underline{ad}\ \underline{b\bar{c}}\ \underline{ee}\ \underline{ff}]$ $a=\parallel d$ $b=c$



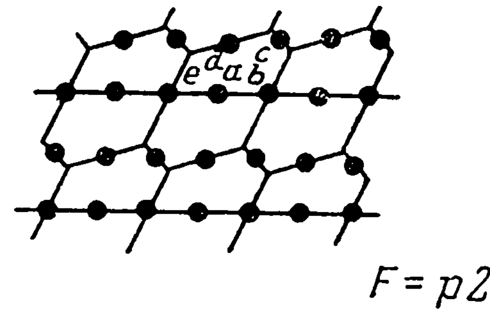
$P_{6,6}$ $[\underline{ad}\ \underline{b\bar{c}}\ \underline{e\bar{f}}]$ $a=\parallel d$ $b=c$ $e=f$



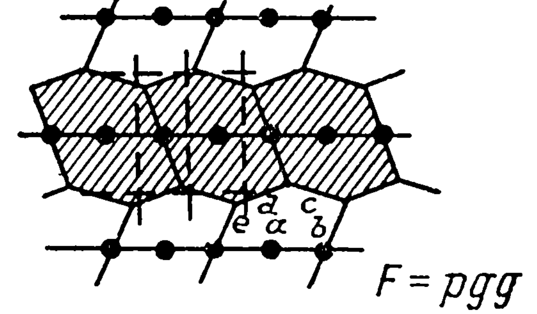
$P_{6,7}$ $[\underline{ad}\ \underline{be}\ \underline{cf}]$ $a=\parallel d$ $b=\parallel e$



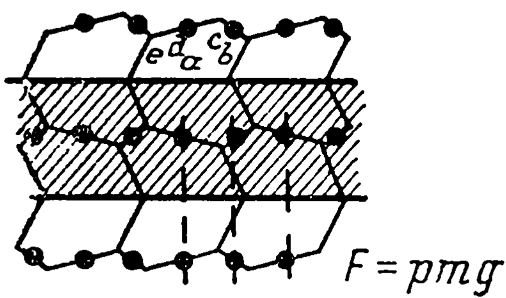
$P_{5A,1}$ $[\underline{aa}\ \underline{be}\ \underline{cc}\ \underline{dd}]$ $b=\parallel e$



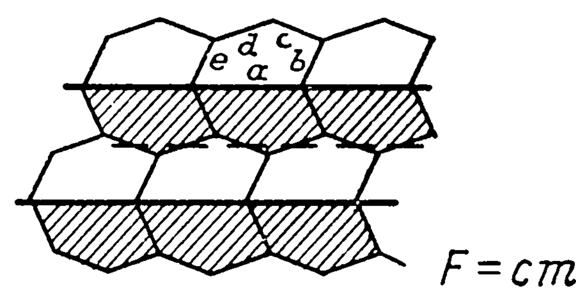
$P_{5A,2}$ $[\underline{aa}\ \underline{be}\ \underline{c\bar{d}}]$ $b=\parallel e$ $c=d$



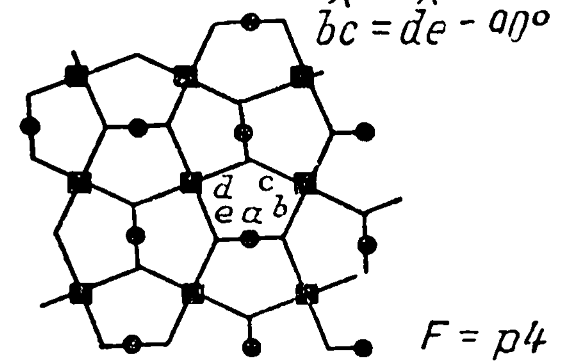
$P_{5A,3}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{be}\ \underline{cc}\ \underline{dd}]$ $b=\parallel e$



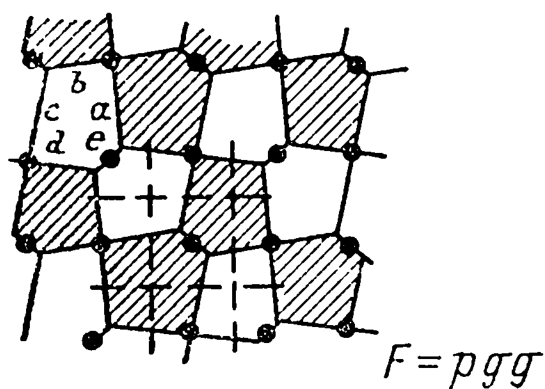
$P_{5A,4}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{be}\ \underline{c\bar{d}}]$ $b=\parallel e$ $c=d$



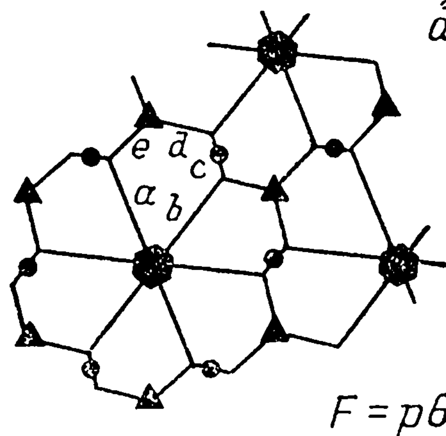
$P_{5B,1}$ $[\underline{aa}\ \underline{bc}\ \underline{de}]$ $b=c$ $d=e$ $\hat{bc}=\hat{de}=90^\circ$



$P_{5B,2}$ $[\underline{a\bar{c}}\ \underline{b\bar{d}}\ \underline{ee}]$ $a=c$ $b=d$ $\hat{ab}+\hat{cd}=180^\circ$



P_{5C} $[\underline{ab}\ \underline{cc}\ \underline{de}]$ $a=b$ $d=e$ $\hat{ab}=60^\circ$ $\hat{de}=120^\circ$



$P_{4A,1}$ $[\underline{aa}\ \underline{bb}\ \underline{cc}\ \underline{dd}]$

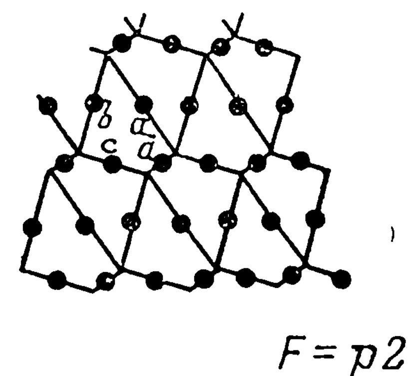
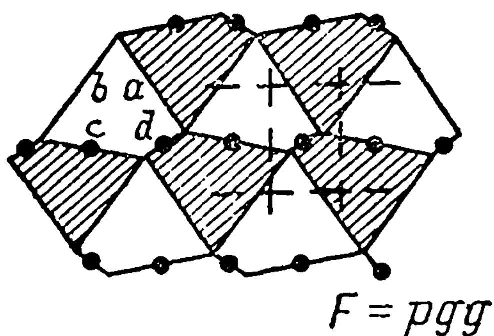


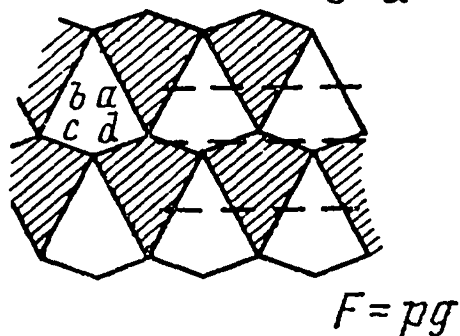
Таблица 1. 46 основных сортов разбиений плоскости на фундаментальные планигоны.

$P_{4A,2}$ $[\underline{a\bar{b}}\ \underline{cc}\ \underline{dd}]$ $a=b$



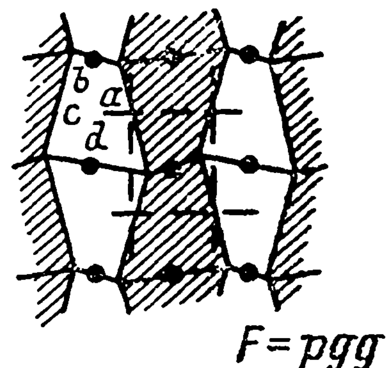
$F=pgg$

$P_{4A,3}$ $[\underline{a\bar{b}}\ \underline{c\bar{d}}]$ $a=b$, $c=d$



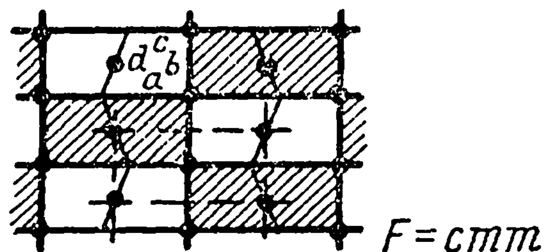
$F=pg$

$P_{4A,4}$ $[\underline{a\bar{c}}\ \underline{bb}\ \underline{dd}]$ $a=c$



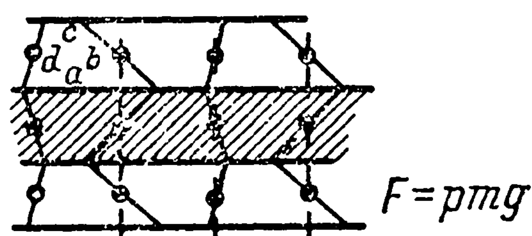
$F=pgg$

$P_{4A,5}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{b\bar{b}}\ \underline{c\bar{c}}\ \underline{dd}]$ $a\perp b$, $b\perp c$



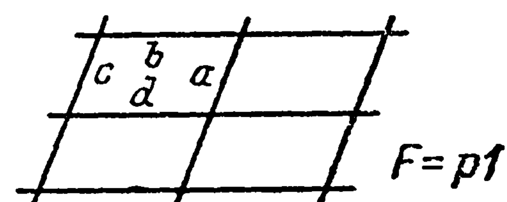
$F=cmm$

$P_{4A,6}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{bb}\ \underline{c\bar{c}}\ \underline{dd}]$ $a\parallel c$



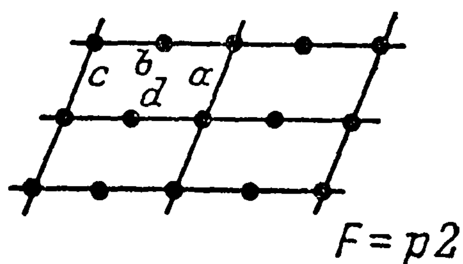
$F=pmg$

$P_{4A,7}$ $[\underline{ac}\ \underline{bd}]$ $a=c$, $b=d$



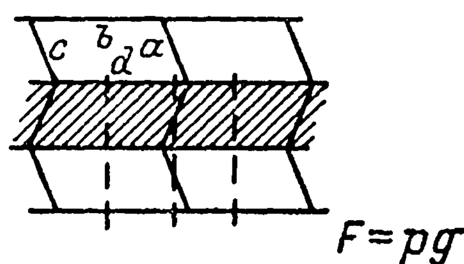
$F=p1$

$P_{4A,8}$ $[\underline{ac}\ \underline{bb}\ \underline{dd}]$ $a=\parallel c$



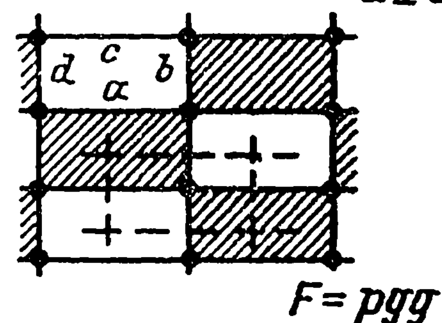
$F=p2$

$P_{4A,9}$ $[\underline{ac}\ \underline{b\bar{d}}]$ $a=\parallel c$



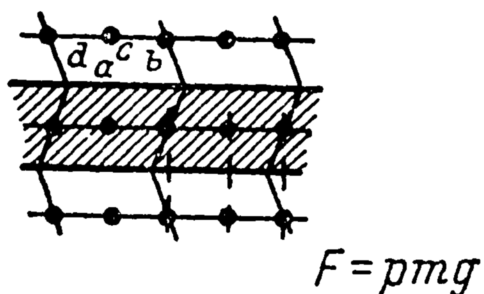
$F=pg$

$P_{4A,10}$ $[\underline{a\bar{c}}\ \underline{b\bar{d}}]$ $a=c$, $b=d$, $a\perp b$



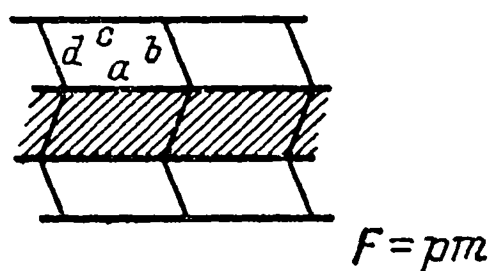
$F=pgg$

$P_{4A,11}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{bd}\ \underline{cc}]$ $b=\parallel d$



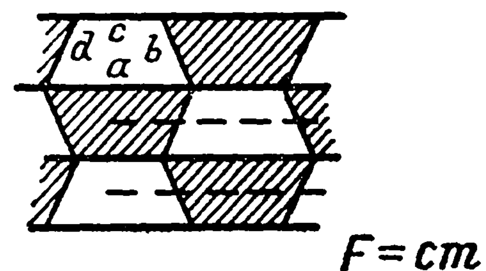
$F=pmg$

$P_{4A,12}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{bd}\ \underline{c\bar{c}}]$ $b=\parallel d$



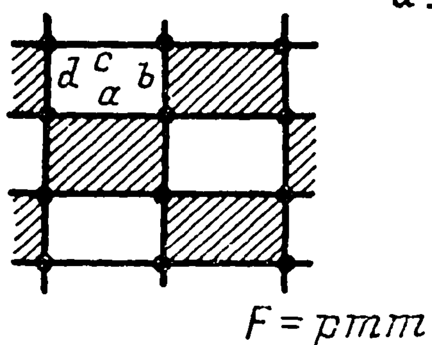
$F=pm$

$P_{4A,13}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{b\bar{d}}\ \underline{c\bar{c}}]$ $a\parallel c$, $b=d$



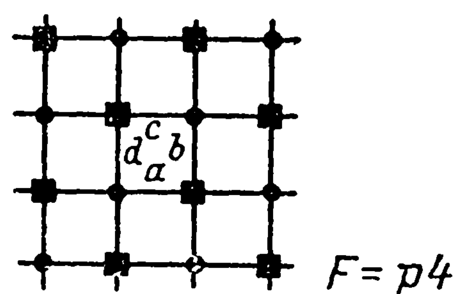
$F=cm$

$P_{4A,14}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{b\bar{b}}\ \underline{c\bar{c}}\ \underline{d\bar{d}}]$ $a=c$, $b=d$, $a\perp b$



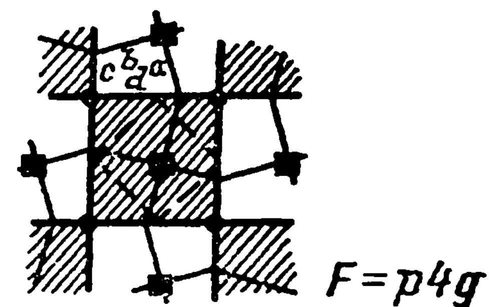
$F=pmm$

$P_{4A,15}$ $[\underline{ab}\ \underline{cd}]$ $a=b=c=d$, $a\perp b$



$F=p4$

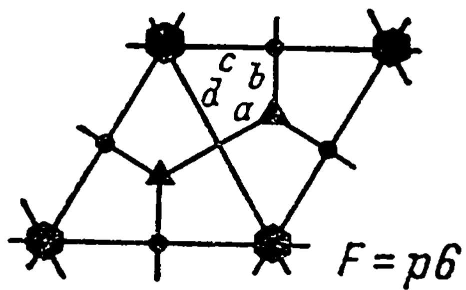
$P_{4A,16}$ $[\underline{ab}\ \underline{c\bar{c}}\ \underline{d\bar{d}}]$ $a=b$, $a\perp b$, $c\perp d$



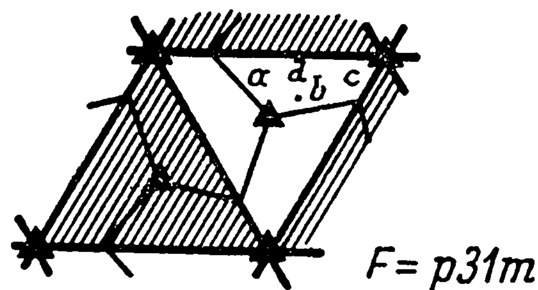
$F=p4g$

Таблица 1 (*продолжение*).

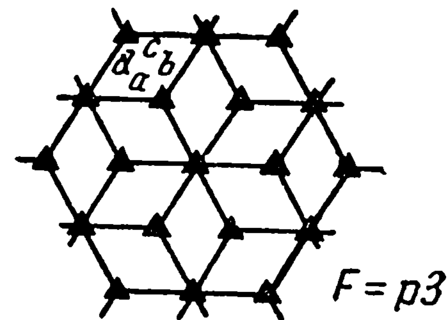
$P_{4B,1}$ $[\underline{ab}\ \underline{cd}]$ $a=b$ $c=d$ $\widehat{ab}=120^\circ$ $\widehat{cd}=60^\circ$



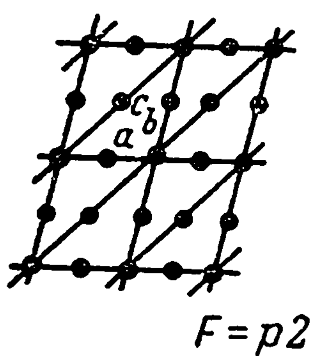
$P_{4B,2}$ $[\underline{ab}\ \underline{c\bar{c}}\ \underline{d\bar{d}}]$ $a=b$ $\widehat{ab}=120^\circ$ $\widehat{cd}=60^\circ$



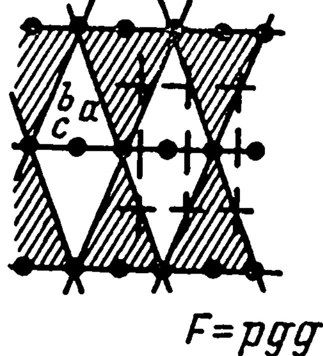
P_{4C} $[\underline{ab}\ \underline{cd}]$ $a=b=c=d$ $\widehat{ab}=120^\circ$



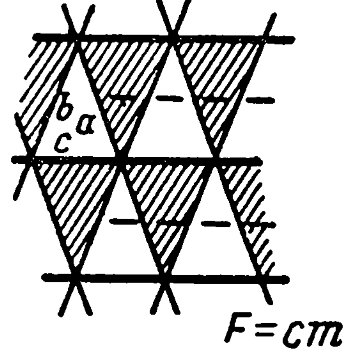
$P_{3A,1}$ $[\underline{aa}\ \underline{bb}\ \underline{cc}]$



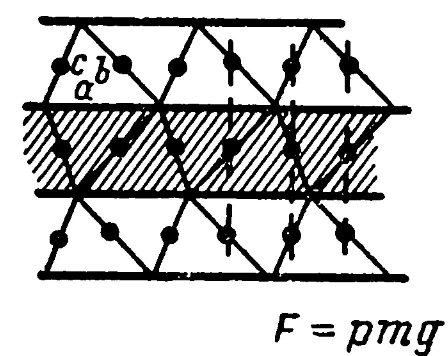
$P_{3A,2}$ $[\underline{a\bar{b}}\ \underline{cc}]$ $a=b$



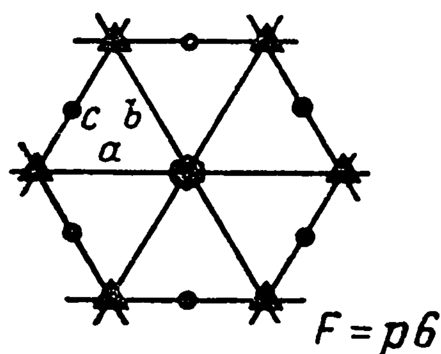
$P_{3A,3}$ $[\underline{a\bar{b}}\ \underline{c\bar{c}}]$ $a=b$



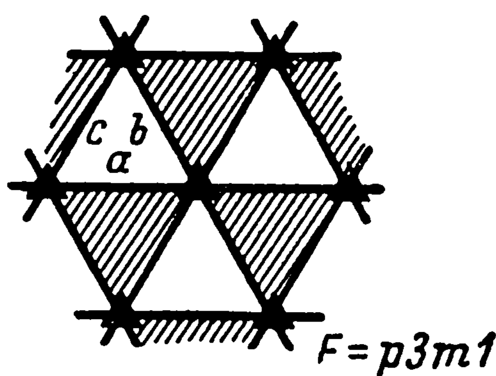
$P_{3A,4}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{bb}\ \underline{cc}]$



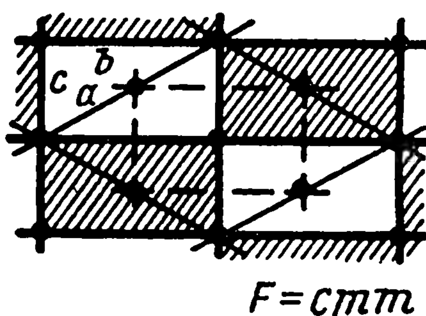
$P_{3A,5}$ $[\underline{ab}\ \underline{cc}]$ $a=b=c$



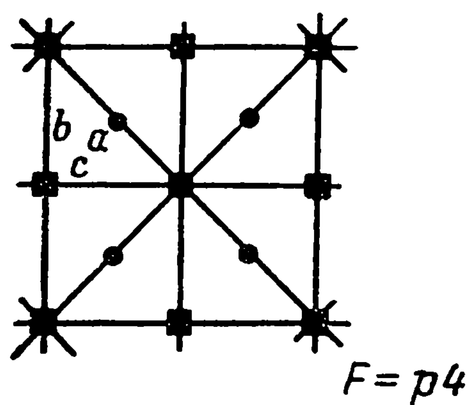
$P_{3A,6}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{b\bar{b}}\ \underline{c\bar{c}}]$ $a=b=c$



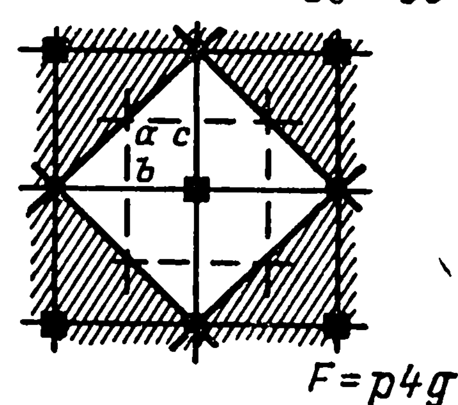
$P_{3B,1}$ $[\underline{aa_8}\ \underline{b\bar{b}_4}\ \underline{c\bar{c}_8}]$ $\widehat{bc}=90^\circ$



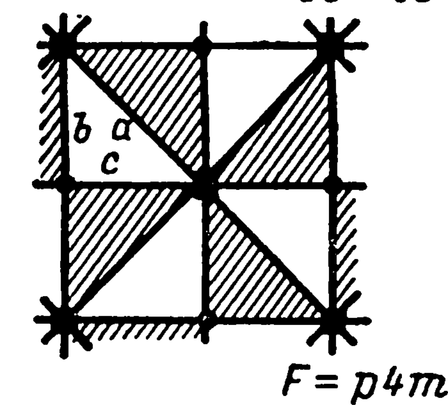
$P_{3B,2}$ $[\underline{aa_8}\ \underline{bc}]$ $b=c$ $\widehat{bc}=90^\circ$



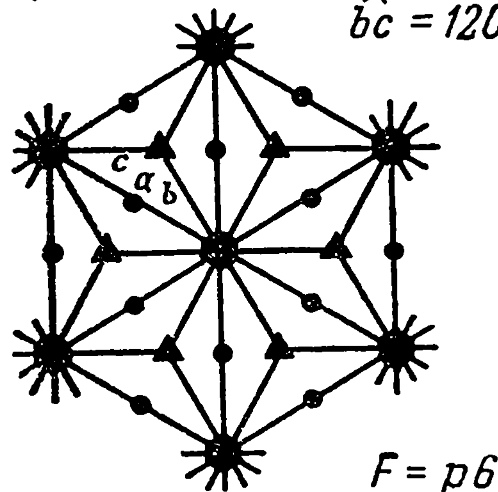
$P_{3B,3}$ $[\underline{a\bar{a}_8}\ \underline{bc}]$ $b=c$ $\widehat{bc}=90^\circ$



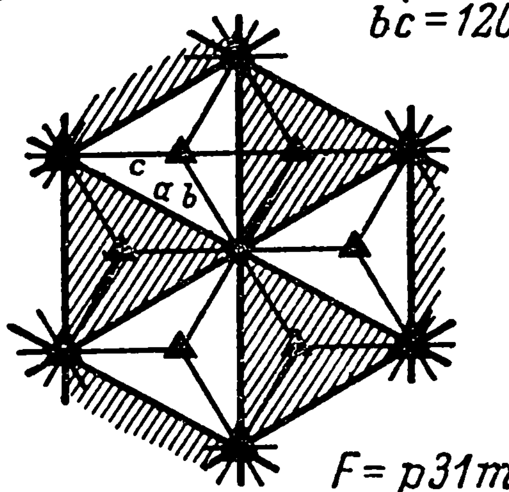
$P_{3B,4}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{b\bar{b}}\ \underline{c\bar{c}}]$ $b=c$ $\widehat{bc}=90^\circ$



$P_{3C,1}$ $[\underline{aa}\ \underline{bc}]$ $b=c$ $\widehat{bc}=120^\circ$



$P_{3C,2}$ $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{bc}]$ $b=c$ $\widehat{bc}=120^\circ$



P_{3D} $[\underline{a\bar{a}}\ \underline{bb}\ \underline{c\bar{c}}]$ $\widehat{ab}=30^\circ$ $\widehat{bc}=90^\circ$

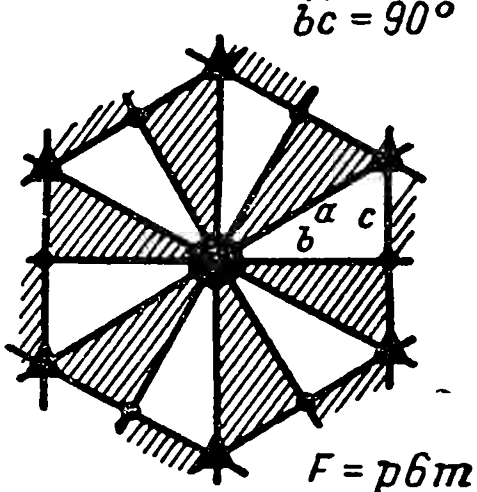


Таблица 1 (*продолжение*).

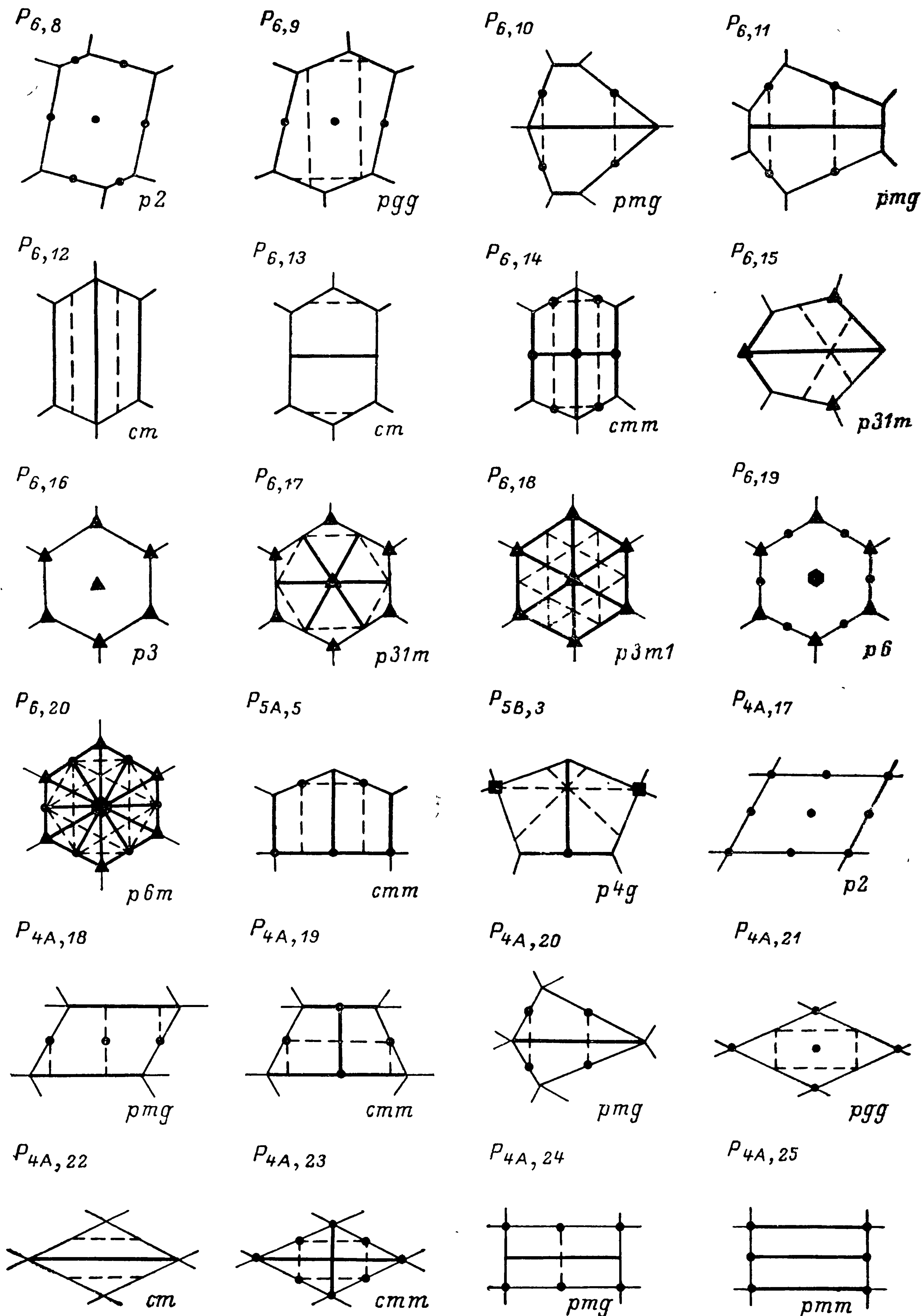
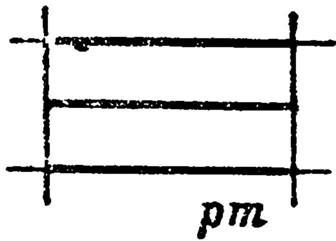
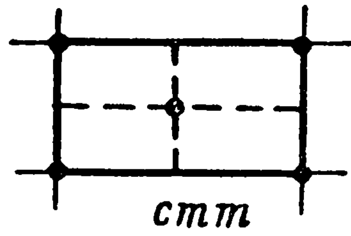


Таблица 2. 47 неосновных сортов планигонов.

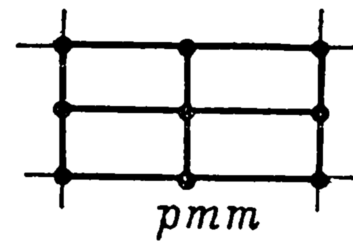
$P_{4A,26}$



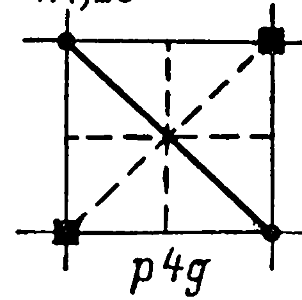
$P_{4A,27}$



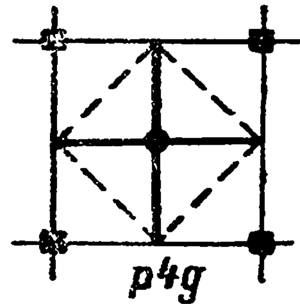
$P_{4A,28}$



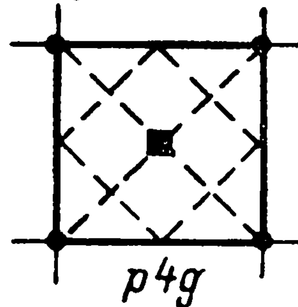
$P_{4A,29}$



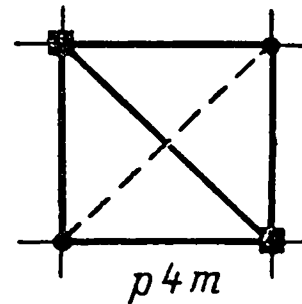
$P_{4A,30}$



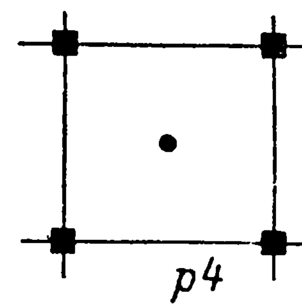
$P_{4A,31}$



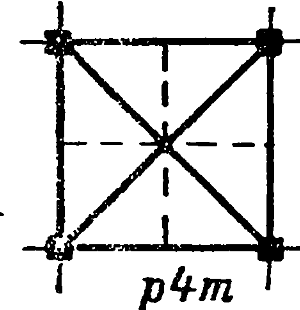
$P_{4A,32}$



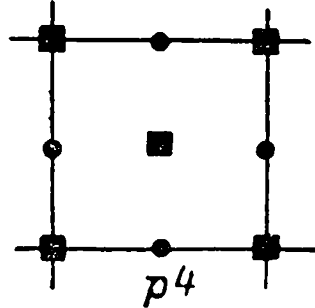
$P_{4A,33}$



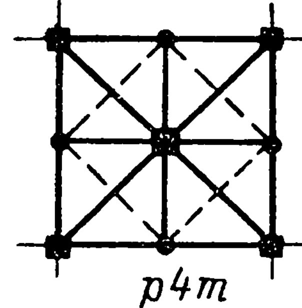
$P_{4A,34}$



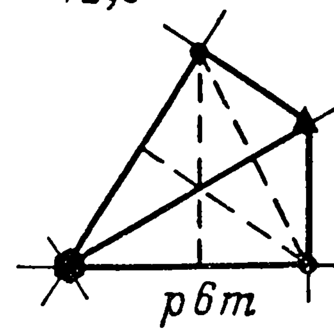
$P_{4A,35}$



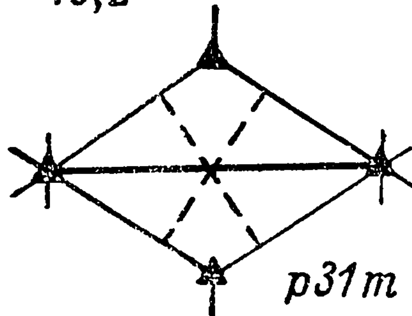
$P_{4A,36}$



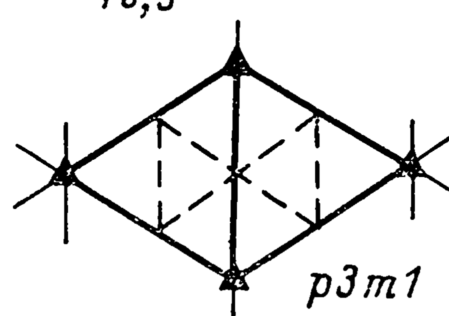
$P_{4B,3}$



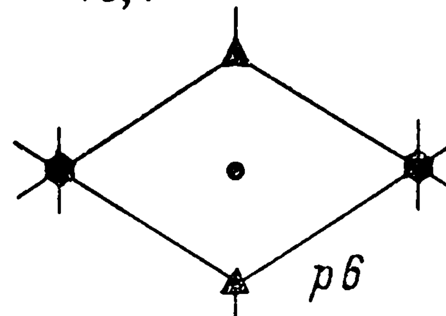
$P_{4C,2}$



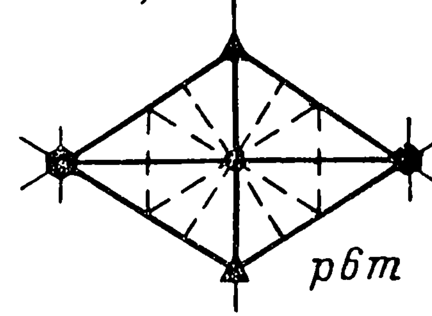
$P_{4C,3}$



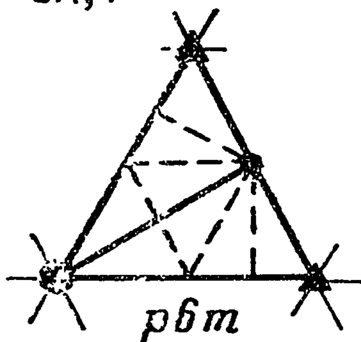
$P_{4C,4}$



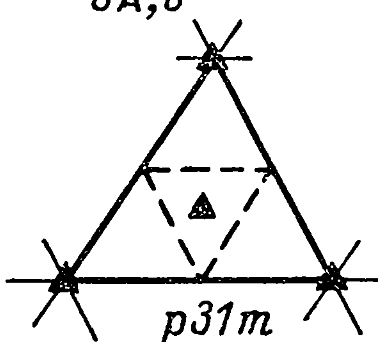
$P_{4C,5}$



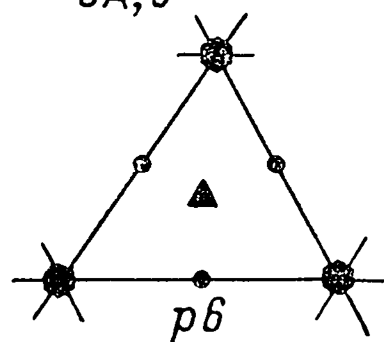
$P_{3A,7}$



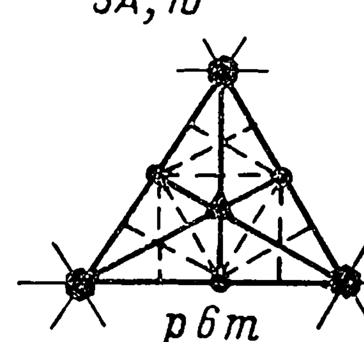
$P_{3A,8}$



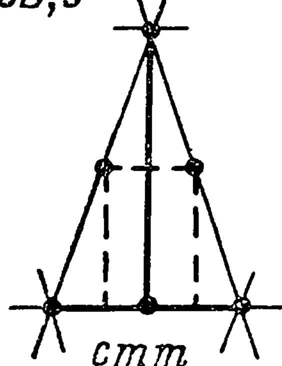
$P_{3A,9}$



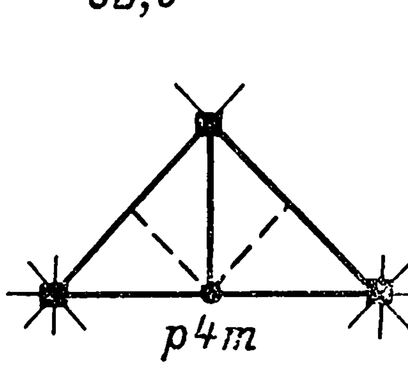
$P_{3A,10}$



$P_{3B,5}$



$P_{3B,6}$



$P_{3C,3}$

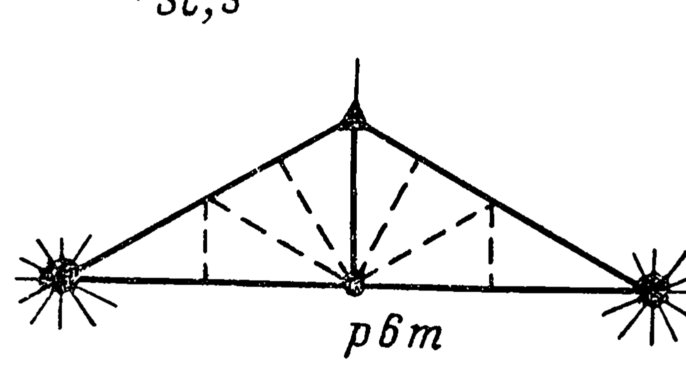


Таблица 2 (*продолжение*).

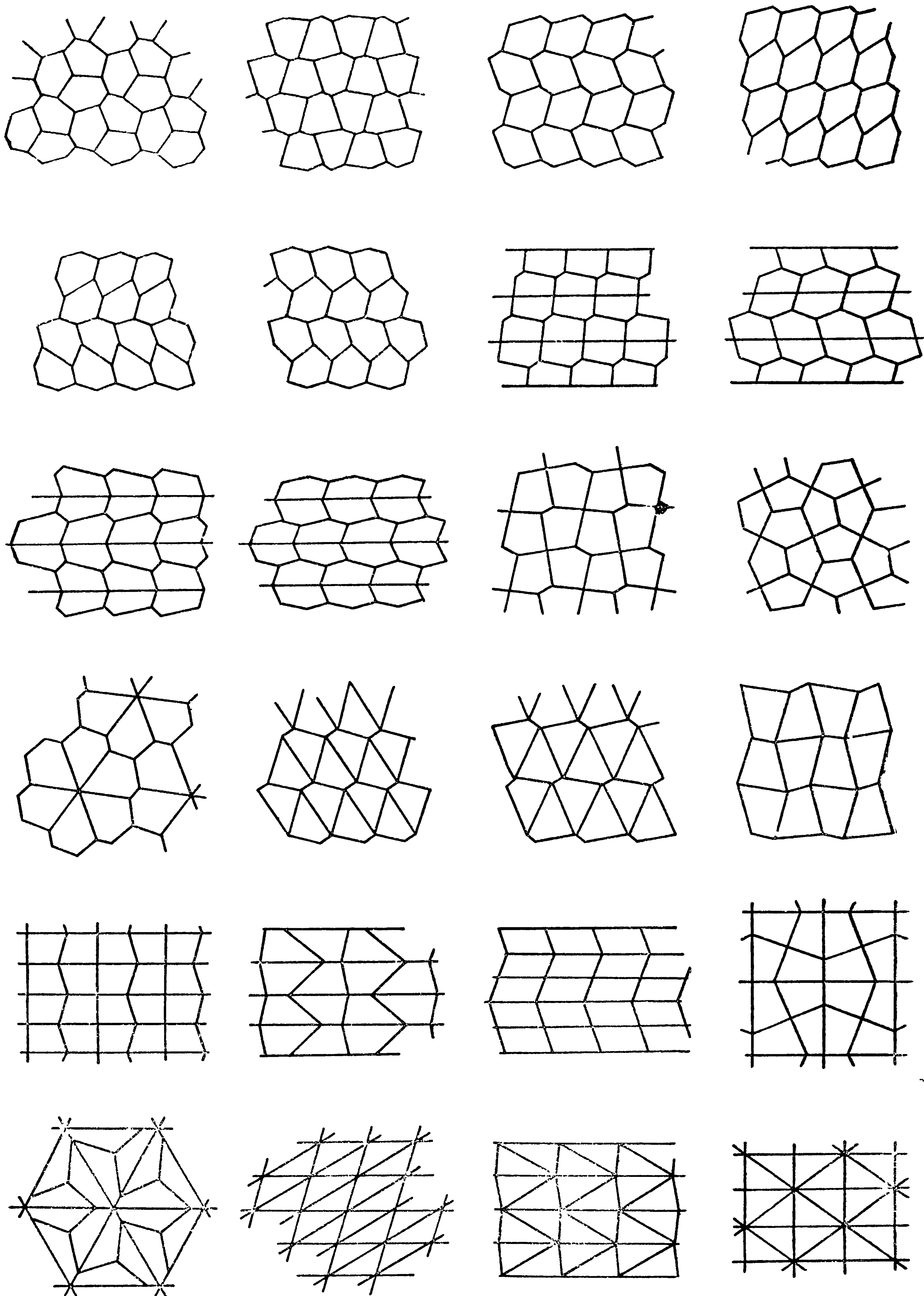


Таблица 3. Геометрическая классификация разбиений евклидовой плоскости на 47 сортов планигонов.

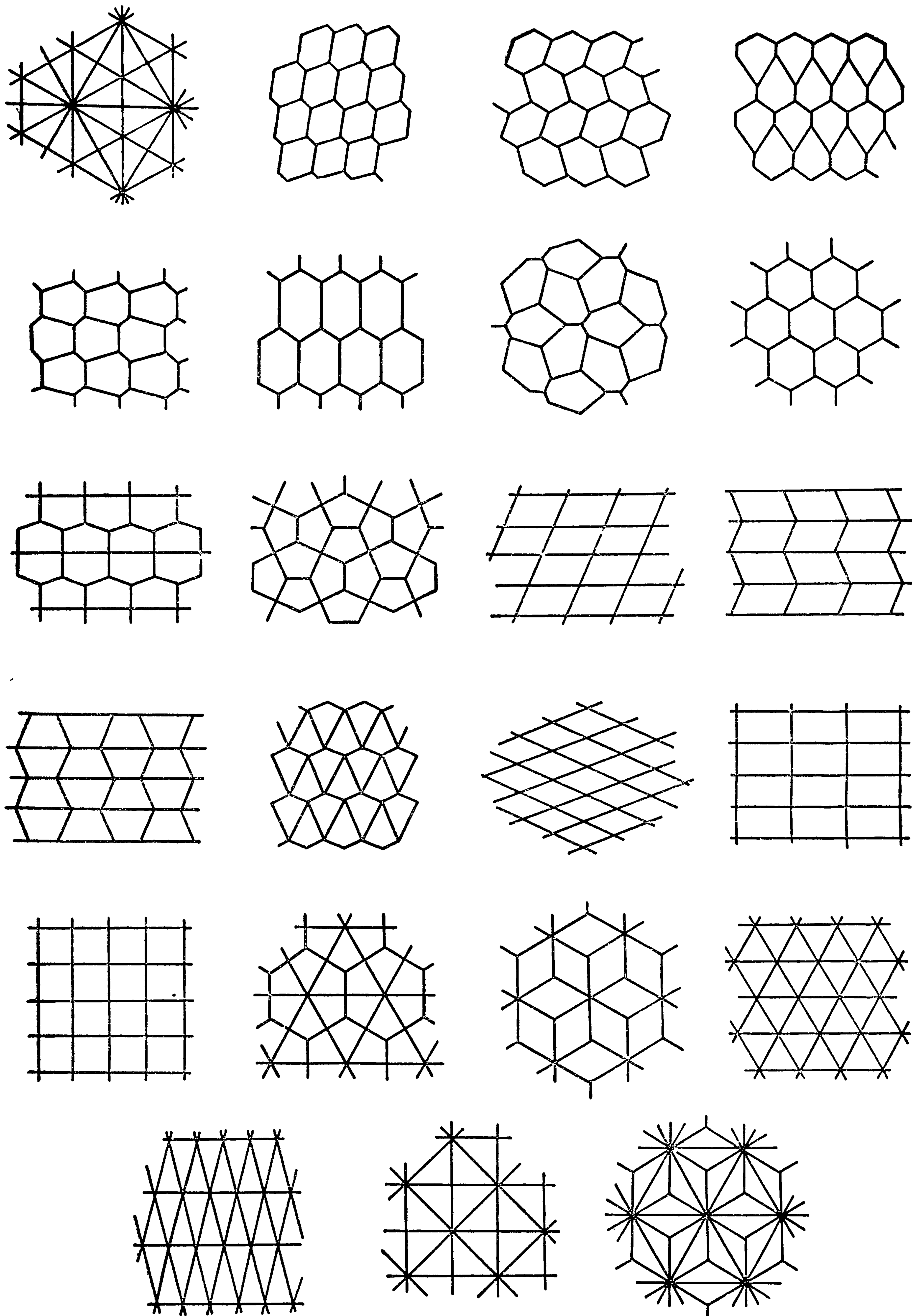


Таблица 3 (*продолжение*).

вопрос о всевозможных метриках по существу связан с основными сортами. Это подчеркивает важность основных сортов в теории планигонов.

8. Теперь для каждого разбиения на планигоны будем брать не любую группу движений, транзитивную относительно его планигонов, а только полную. С каждым отдельным разбиением такая полная группа связана однозначно. Тогда мы получим не все 93 сорта, а лишь некоторые из них 47 (табл. 3). К ним относятся 25 основных — $P_{6,1}$, $P_{6,2}$, $P_{6,3}$, $P_{6,4}$, $P_{6,5}$, $P_{6,6}$, $P_{5A,1}$, $P_{5A,2}$, $P_{5A,3}$, $P_{5A,4}$, $P_{5B,1}$, $P_{5B,2}$, P_{5C}, $P_{4A,1}$, $P_{4A,2}$, $P_{4A,4}$, $P_{4A,5}$, $P_{4A,6}$, $P_{4A,11}$, $P_{4A,16}$, $P_{4B,2}$, $P_{3A,1}$, $P_{3A,4}$, $P_{3B,1}$, P_{3D} и 22 неосновных — $P_{6,8}$, $P_{6,9}$, $P_{6,10}$, $P_{6,11}$, $P_{6,14}$, $P_{6,15}$, $P_{6,20}$, $P_{5A,5}$, $P_{5B,3}$, $P_{4A,17}$, $P_{4A,18}$, $P_{4A,19}$, $P_{4A,20}$, $P_{4A,23}$, $P_{4A,28}$, $P_{4A,36}$, $P_{4B,3}$, $P_{4C,5}$, $P_{3A,10}$, $P_{3A,11}$, $P_{3B,5}$, $P_{3C,3}$.

Табл. 3 примечательна тем, что собственно ею представлена геометрическая классификация разбиений евклидовой плоскости на планигоны, аналогичная классификации простых форм кристаллов на 47 типов, трехмерных параллелоэдров Дирихле на 24 сорта, трехмерных параллелоэдров Е. С. Федорова на 37 классов (см. § 4). Если не требовать прямолинейности сторон планигонов, то получится аналогичная классификация правильных разбиений на 81 сорт [28].

9. Все разбиения на планигоны Дирихле в паре с какими-либо транзитивными их федоровскими группами, как и разбиения на планигоны не Дирихле, делятся на 93 сорта. Если же разбиения Дирихле классифицировать с точки зрения полной группы, то мы получим всего лишь 37 таких сортов, из них 19 основных — $D_{6,1}$, $D_{6,2}$, $D_{6,4}$, $D_{6,5}$, $D_{5A,1}$, $D_{5A,3}$, $D_{5B,1}$, $D_{5B,2}$, D_{5C}, $D_{4A,1}$, $D_{4A,2}$, $D_{4A,5}$, $D_{4A,6}$, $D_{4A,16}$, $D_{4B,2}$, $D_{3A,1}$, $D_{3A,4}$, $D_{3B,1}$, D_{3D} и 18 неосновных — $D_{6,8}$, $D_{6,10}$, $D_{6,11}$, $D_{6,14}$, $D_{6,15}$, $D_{6,20}$, $D_{5A,5}$, $D_{5B,3}$, $D_{4A,19}$, $D_{4A,20}$, $D_{4A,28}$, $D_{4A,36}$, $D_{4B,3}$, $D_{4C,5}$, $D_{3A,10}$, $D_{3A,11}$, $D_{3B,5}$, $D_{3C,3}$.

Чтобы планигоны были планигонами Дирихле, они должны удовлетворять еще некоторым дополнительным метрическим условиям [10]. Количество классов разбиений на планигоны Дирихле несколько меньше количества классов разбиений на произвольные планигоны (не Дирихле).

10. Совокупность многоугольников разбиения, смежных с каким-либо его исходным многоугольником, назовем первой обклейкой исходного многоугольника в этом разбиении. Оказывается, имеет место следующий факт. Если пытаться построить хотя бы какое-либо разбиение, первые обклейки всех многоугольников которого были бы конгруэнтны первой обклейке планигона некоторого данного правильного разбиения, то мы получим лишь одно это правильное разбиение. Другими словами, любое разбиение евклидовой плоскости на планигоны однозначно определяется конечным своим куском, например первой обклейкой своего планигона. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что выделенных планигонов достаточно для того, чтобы найти образующие группы всех тех движений, которые совмещают разбиение с собой. Поиски решения аналогичного вопроса для n-мерного пространства привели нас к локальному критерию правильности системы точек [12].

§ 4. Параллелоэдры

1. Все комбинаторно-топологические типы трехмерных параллелоэдров (см. рис. 1) впервые были найдены Е. С. Федоровым [2]. Учитывая комбинаторно-топологическое устройство параллелоэдра, его полную группу симметрии и положение осей симметрии относительно самого параллелоэдра, мы разделяем все федоровские параллелоэдры на 37 классов (сортов — с точки зрения полной группы симметрии параллелоэдров). Эта классификация федоровских параллелоэдров (табл. 4) аналогична классификации простых форм кристаллов на 47 типов. Все транзитивные группы разбиений на параллелоэдры исследованы в [1].

2. В кристаллографии особо важную роль занимают параллелоэдры Дирихле (области действия точек решетки).

Ю. В. Вульф [13] впервые связал параллелоэдры Дирихле с внешними формами кристаллов. Он пишет: «Пусть кристалл начинает расти из точки K и растет далее по всем направлениям так, что все его грани в одно и то же время удаляются от точки K на отрезки, обратно пропорциональные ретикулярным плотностям; тогда кристалл принимает форму, которая все время роста геометрически подобна многограннику π» (с. 196). Названный здесь «многогранник π» является параллелоэдром Дирихле для решетки, обратной (полярной) трансляционной решетке данного кристалла. Этот многогранник определяет габитус кристалла (идеальный габитус кристалла по Вульфу). Учитывая комбинаторно-топологическое устройство этого многогранника и группу его симметрии (которая всегда является голоэдрией), Ю. В. Вульф эмпирически нашел 17 таких многогранников. Однако он не обнаружил еще 7. Именно 24 сорта параллелоэдров Дирихле, найденные Б. Н. Делоне [6], определяют все идеальные габитусы кристаллов по Вульфу.

Вместе с параллелоэдрами Дирихле все трехмерные решетки делятся на 24 сорта Делоне [6]. Все решетки одного и того же сорта Делоне одновременно принадлежат одному и тому же типу Браве (а какие — какому — указано в таблице 24 сортов [6]). Если на практике требуется определить тип Браве той или иной решетки, заданной своим произвольным основным репером, то в общем случае проще сначала определить сорт Делоне, употребляя для этой цели всем известное и практически очень удобное приведение Делоне.

3. Теория параллелоэдров была обобщена на n-мерное пространство.

Число $(n-1)$-мерных граней произвольного выпуклого n-мерного параллелоэдра, как показал Г. Минковский [14], не превышает $2(2^n-1)$. Для подтверждения этого факта Минковскому пришлось доказывать трудную вспомогательную теорему о существовании центра симметрии у любого выпуклого параллелоэдра. Однако, как следует из [15], существование центра симметрии у параллелоэдра для нахождения этой оценки можно обойти.

Б. А. Венков [16] нашел следующий своеобразный критерий: для того чтобы n-мерный выпуклый многогранник был параллелоэдром, необхо-

	1	2	3	4	5
K					
Q					
R H					
O					
M					
T					

Таблица 4. 37 классов федоровских параллелоэдров.

димо и достаточно, чтобы он сам имел центр симметрии, все его $(n-1)$-мерные грани имели центры симметрии и все его проекции на двумерную плоскость вдоль $(n-2)$-мерных лучей, параллельных его $(n-2)$-мерным граням, были параллелогонами.

Более подробно остановимся на исследованиях Г. Ф. Вороного [17], которому принадлежат самые значительные результаты по общей теории многомерных параллелоэдров.

Нормальное разбиение n-мерного евклидова пространства на выпуклые параллелоэдры Г. Ф. Вороной назвал п р и м и т и в н ы м, если в каждой вершине разбиения сходится ровно $n+1$ (минимальное возможное число) параллелоэдр. Для таких разбиений он доказал следующую теорему: любое примитивное разбиение на параллелоэдры есть аффинный образ некоторого разбиения Дирихле.

О. К. Житомирский заметил [18], что доказательство Г. Ф. Вороного можно распространить и на некоторые непримитивные параллелоэдры. Применив другой метод к решению этой задачи, Б. Н. Делоне доказал [19], что при $n=4$ справедливо общее предположение Г. Ф. Вороного, а именно: всякое нормальное разбиение на параллелоэдры (как примитивное, так и непримитивное) при помощи некоторого аффинного преобразования может быть превращено в разбиение Дирихле. Справедливость этого общего предположения при $n \geqslant 5$ до сих пор не доказана. А между тем доказательство этого предположения свело бы вопрос об описании типов всех параллелоэдров к вопросу о нахождении параллелоэдров Дирихле.

Нахождение разбиений на параллелоэдры Дирихле равносильно нахождению дуальных к ним разбиений $\{L\}$.

Если разбиение на параллелоэдры Дирихле является примитивным, то дуальное ему разбиение L является симплициальным. Симплициальное разбиение $\{L\}$ называется о б щ и м. Согласно Г. Ф. Вороному, две решетки относятся к одному и тому же т и п у, если их разбиения $\{L\}$ аффинны друг другу.

Рассмотрим фиксированную (исходную) решетку данного общего типа. Выделим в ней основной репер. Для каждого симплекса L этой решетки выпишем координаты его вершин. Теперь рассмотрим все основные реперы всех тех решеток, для которых вершины каждого отдельного симплекса L имеют те же координаты, что и исходная решетка. Тогда совокупность точек пространства параметров, соответствующих всем этим реперам, составляет о б л а с т ь д а н н о г о т и п а. Если бы в исходной решетке мы выделили другой основной репер, в котором вершины симплексов L имеют другие координаты, то мы пришли бы к другой области данного типа, эквивалентной первой.

Область типа представляет собой $N=\frac{n(n+1)}{2}$-мерный выпуклый конечногранный гоноэдр с вершиной в начале координат. Все области типов составляют нормальное разбиение конуса положительности квад-

ратичных форм. В этом разбиении имеется лишь конечное число неэквивалентных областей типов.

Для нахождения всех неэквивалентных областей типов Г. Ф. Вороной предложил конечный алгоритм. Прежде всего, он указал, как происходит перестройка разбиения $\{L\}$ при переходе из одной области типа в смежную с ней по $(N—1)$-мерной грани другую область типа и как найти все $(N—1)$-мерные грани этой соседней области типа. Затем он построил так называемую главную область I типа. Теперь, отправляясь от главной области I типа, следует найти все смежные с ней области типов — получится первый слой. Для всех областей первого слоя следует найти все смежные с ними другие области типов — получится второй слой, и т. д. Построение новых слоев будет продолжаться до тех пор, пока не получится такой слой, все области типов которого эквивалентны областям типов предшествующих ему слоев. Тогда все неэквивалентные области типов окажутся среди найденных таким способом областей типов.

С помощью этого алгоритма Г. Ф. Вороной показал, что в случае $n=4$ существует всего лишь 3 неэквивалентные области типа. Им соответствуют три примитивных параллелоэдра.

Алгоритм Вороного оказался слишком сложным для $n=5$. Введя новое понятие — типы смежности, С. С. Рышков и Е. П. Барановский предложили двухступенчатый алгоритм [3], с помощью которого они нашли все примитивные 5-мерные параллелоэдры. Их оказалось 221. Классификация всех параллелоэдров пространств размерности выше пяти нам кажется почти безнадежной.

Б. Н. Делоне переработал теорию Вороного, положив в ее основу метод пустого шара [20]. Метод пустого шара в соединении с рассмотрением указанных областей типа оказался решающим в вопросах (поставленных английскими математиками в начале 50-х годов [21]) о решетках данной плотности, точки которых наиболее равномерно расположены в n-мерном пространстве. Лучшей такой решеткой на плоскости является решетка, построенная на правильном треугольнике, а в трехмерном пространстве — объемно-центрированная кубическая решетка. Эти решетки только немного лучше кубической, по которой обычно выбираются интерполяционные точки. В пространствах высшего числа измерений есть решетки несравненно лучше кубических, причем качество их растет показательно с числом измерений. Например, для случая $n=15$ есть решетки, которые в 720 раз выгоднее 15-мерной кубической.

§ 5. Стереоэдры

1. Вывод всех трехмерных федоровских групп осуществлен еще в прошлом столетии [22]. Однако все правильные разбиения трехмерного евклидова пространства до сих пор не найдены. Имеются лишь некоторые частные решения этой задачи (например, [1, 23, 24]). Совсем недавно еще не было даже известно, конечно ли число комбинаторно-топологических типов стереоэдров или бесконечно.

В 1961 г. [15] Б. Н. Делоне доказал следующую принципиальную теорему: при любом данном n существует лишь конечное число различных комбинаторно-топологических типов (а тем самым и сортов) правильных нормальных разбиений n-мерного евклидова пространства на выпуклые стереоэдры. В той же работе Б. Н. Делоне доказал, что число граней произвольного выпуклого n-мерного стереоэдра не превышает $2(2^n-1)+(h'-1)2^n$, где h' — число стереоэдров правильного разбиения, не ориентированных параллельно.

Метод доказательства конечности числа граней стереоэдра приводит к некоторому более общему результату. Рассмотрим нормальное или ненормальное разбиение n-мерного евклидова пространства на выпуклые тела, распадающиеся на q «решеток» таких тел. Предполагается, что в каждой отдельной такой решетке ее тела попарно конгруэнтны и ориентированы параллельно. Тела же разных таких «решеток» могут быть неконгруэнтны. Тогда количество целых $(n-1)$-мерных граней (целых граней — в случае ненормального разбиения или просто граней — в случае нормального разбиения) любого тела такого разбиения не превосходит $2(2^n-1)+(q-1)2^n$.

2. Рассмотрим теперь произвольное разбиение n-мерного пространства на связные тела. Допускается, что разные тела этого разбиения могут быть неконгруэнтны и что грани этих тел могут быть криволинейными. Предположим, что существуют такие фиксированные положительные числа ρ и d, что все тела этого разбиения обладают вписанными шарами радиуса ρ, а диаметры всех этих тел не превосходят d. Тогда в этом разбиении имеется лишь конечное число тел, смежных (имеющих хотя бы одну общую точку) с каким-либо исходным телом. Это число, очевидно, не превосходит $({}^{2d}/\rho)^n$.

Любое данное ненормальное разбиение n-мерного евклидова пространства на выпуклые стереоэдры, очевидно, обладает такими ρ и d. Поэтому в таком разбиении имеется лишь конечное число стереоэдров, смежных с исходным. Но, как следует из примера А. М. Заморзаева [25], это число может быть сколь угодно большим.

3. Рассмотрим одинаковые паркетины, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда некоторой толщины h, ширины 1 и длины m, где m — любое целое число. Составим из этих паркетин, складывая их последовательно, торцами, бесконечную полоску. Из таких полосок составим бесконечный слой толщиной h, такой, что каждые две такие соседние полоски смещены относительно друг друга в одну и ту же сторону на длину 1. Теперь рассмотрим плоскость, перпендикулярную этому исходному слою, образующую угол 45° с направлением длины его паркетин и проходящую через середины единичных сторон торцов паркетин. Примем ее за плоскость скользящего отражения, вектор скольжения которой перпендикулярен исходному слою и по длине равен h. Это скользящее отражение переводит исходный слой в некоторый другой слой, лежащий на первом, паркетины которого перпендикулярны паркетинам первого.

Второй слой при этом скользящем отражении перейдет в третий слой, параллельный первому слою, и т. д. Паркетины всех, так связанных между собой слоев, очевидно, составляют правильное ненормальное разбиение пространства [25]. Так как число паркетин такого разбиения, смежных с данной паркетиной, неограничено растет при возрастании числа m, то существует бесконечно много различных комбинаторно-топологических типов таких разбиений.

Этот пример подтверждает, что уже в случае $n=3$ требование нормальности разбиения в теореме Делоне о конечности типов является существенным.

4. Среди всех правильных разбиений особое положение занимают правильные разбиения Дирихле.

Разбиение Дирихле для правильной системы точек $\{A_G\}$ вполне характеризуется заданием так называемой звезды L_A, т. е. совокупности всех многогранников L этой системы, прилегающих к ее точке A. Можно показать, что все вершины звезды L_A находятся в удвоенной области (параллелоэдре) Дирихле точки A в решетке, соответствующей подгруппе параллельных переносов группы G. Однако по теореме Н. Н. Сандаковой [26] все точки параллелоэдра Дирихле имеют ограниченные координаты в репере из последовательных минимумов (приведенном по Минковскому). Ввиду этого можно указать такой набор точек из $\{A_G\}$, среди которых находятся вершины всех звезд L_A, соответствующих всем различным значениям параметров (из которых m параметров репера изменяются в области приведения Минковского, а n координат точки изменяются в единичном параллелепипеде). Зная этот набор, мы чисто комбинаторным перебором можем построить лишь конечное число кандидатов в звезды L_A. Чтобы убедиться в том, является ли такой кандидат реальной звездой или нет, следует проверить, лежат ли все вершины каждого отдельного кандидата в многогранники L на одной сфере и пуста ли эта сфера от остальных точек набора [26]. Другими словами, нам предстоит решить следующую алгебраическую задачу: задано конечное число многочленов от k (в нашем случае $k=m+n$) переменных; некоторые из них приравнены нулю, а относительно оставшихся предполагается, что они больше нуля; требуется узнать, существуют ли такие вещественные значения этих переменных, которые удовлетворяют всем написанным уравнениям и неравенствам. Тарский и Зайденберг [27] показали, что такая задача всегда разрешима в конечном числе действий. Однако число этих действий столь велико, что практически решить ее в большей части случаев затруднительно. Это и есть причина того, что даже для $n=3$ все правильные разбиения Дирихле еще пока не найдены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fedorov E. S. Reguläre Plan- und Raumtheilung. — Abhandl. K. Bayer Akademie der Wiss., 1899, Bd 11, Cl XX, Abth. 11, München, S. 465—588.
2. Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. СПб., 1885. 289 с.

3. Рышков С. С., Барановский Е. П. C-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры. — Тр. МИАН СССР, 1976, т. 137, с. 3—130.
4. Галиулин Р. В., Рышков С. С. О некоторых основных понятиях геометрической кристаллографии. — В кн.: Проблемы кристаллологии. М., 1971, с. 290—298.
5. Делоне Б. Н. Геометрия положительных квадратичных форм. — УМН, 1937, вып. 3, с. 16—62; 1938, вып. 4, с. 102—164.
6. Делоне Б. Н., Александров А. Д., Падуров Н. Н. Математические основы структурного анализа кристаллов. М., 1934. 324с.
7. Бокий Г. Б. Число физически различных простых форм кристаллов. — Тр. Лабор. кристаллогр. АН СССР, 1940, № 2, с. 13—37.
8. Шубников А. В. К вопросу о строении кристаллов. — Изв. АН СССР, сер. 6, 1916, т. 10, № 9, с. 755—779.
9. Laves F. Ebentheilung und Koordinationszahl. — Z. Kristallogr., 1930, Bd 78, S. 208—241.
10. Делоне Б. Н. Теория планигонов. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1959, т. 23, с. 365—386.
11. Heesch H. Reguläres Parketierungsproblem. — Westdeutsche Verlag, Köln und Opladen, 1968.
12. Делоне Б. Н., Долбилин Н. П., Штогрин М. И., Галиулин Р. В. Локальный критерий правильности системы точек. — ДАН СССР, 1976, т. 227, № 1, с. 19—21.
13. Вульф Ю. В. К теории внешней формы кристаллов. — В кн.: Избранные работы по кристаллографии и кристаллофизике. М.—Л., 1952, с. 192—241.
14. Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen. 1911.
15. Делоне Б. Н. Доказательство основной теоремы теории стереоэдров. — ДАН СССР, 1961, т. 138, № 6, с. 1270—1272.
16. Венков Б. А. Вестн. ЛГУ, сер. матем., 1954, № 2, с. 11—31.
17. Вороной Г. Ф. Исследования о примитивных параллелоэдрах. — Собр. соч., 1952, т. 2, с. 239—268.
18. Житомирский О. К. Об одном обобщении теоремы Вороного. — Журн. Ленингр. матем. об-ва, 1927, с. 131—151.
19. Делоне Б. Н. О правильном разбиении 4-мерного пространства. — Изв. АН СССР, сер. 7, 1929, № 1, с. 77—110; № 2, с. 147—164.
20. Delaunay B. Sur la sphere vide. — Proc. Intern. mathem. Congr. in Toronto. August, 11—16, 1924. 1928, Toronto, p. 695—700.
21. Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary formes. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1957, A-249, p. 461—506.
22. Федоров Е. С. Симметрия правильных систем фигур. — Зап. Минералог. об-ва, сер. 2, 1891, т. 28, с. 345—390.
23. Штогрин М. И. Правильные разбиения Дирихле — Вороного для второй триклинной группы. — Тр. МИАН СССР, 1973, т. 123, с. 127.
24. Koch E. Wirkungsbereichspolyeder und Wirkungsbereichsteilungen zu kubischen Gitterkomplexen mit weniger als drei Freiheitsgraden. Marburg/Lahn, 1972. 178 S.
25. Заморзаев А. М. О ненормальных правильных разбиениях евклидова пространства. — ДАН СССР, 1965, т. 161, № 1, с. 30—32.
26. Делоне Б. Н., Сандакова Н. Н. Теория стереоэдров. Тр. МИАН СССР, 1961, т. 64, с. 28—51.
27. Tarsky A. The completness of elementary algebre and geometry. Paris, 1967. 50 p.
28. Grünbaum B., Shephard G. C. The eighty-one types of isohedral tilings in the plane. — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., September, 1977, vol. 82, pt 2, p. 177—196.

В. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ, И. И. ШАФРАНОВСКИЙ

Е. С. ФЕДОРОВ И ЕГО НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ

Евграф Степанович Федоров родился 22 декабря (н. ст.) 1853 г. в Оренбурге, в семье военного инженера. Вскоре семья Федоровых переехала в Петербург, где прошли детство и юность ученого.

Среднее образование Е. С. Федоров получил в военной гимназии. До ее окончания, в возрасте 15 лет, он поступил в Военно-инженерное училище, которое закончил в 1872 г.

После этого некоторое время Федоров служил подпоручиком в саперном батальоне на Украине, а в 1874 г. вышел в отставку и возвратился в Петербург.

Несмотря на ярко выраженную склонность к математике, свой путь Федоров нашел не сразу. Сперва он был вольнослушателем Военной медико-хирургической академии, а затем поступил в Технологический институт, где прошел полный курс химии.

Разработка математической теории многогранников натолкнула Федорова на вопросы, относящиеся к природным многогранникам — кристаллам. Именно поэтому в возрасте 27 лет он поступил на третий курс Горного института, где в то время наиболее глубоко штудировались курсы кристаллографии и минералогии.

К сожалению, официальные представители кристаллографии и минералогии в Горном институте — академики Н. И. Кокшаров и П. В. Еремеев — не смогли оценить выдающегося значения трудов молодого ученого и его монография «Начала учения о фигурах» увидела свет лишь в 1885 г. Федоров не был даже оставлен при Горном институте, несмотря на то, что окончил курс первым по списку с занесением имени на мраморную доску.

После окончания Горного института Евграф Степанович в течение десяти лет занимал скромную должность делопроизводителя и консерватора Геологического комитета, а в летние периоды проводил геологические исследования на Северном Урале. Именно к этому периоду относятся труды ученого по кристаллографии, создавшие эпоху в науке.

В 1894 г. Е. С. Федоров переехал на Урал, в Богословский округ, где проводил геологическую съемку.

В 1895 г. он был приглашен на должность профессора геологии в Московский сельскохозяйственный институт. Здесь прошли 10 лет его жизни. К этому периоду относятся его классические циклы работ по применению теодолитного метода в петрографии и минералогии и по теории кристаллических структур.

Труды Федорова привлекли внимание зарубежных специалистов, и в 1896 г. он был избран членом Баварской Академии наук.

В 1901 г. Евграф Степанович был избран адьюнктом Российской Академии наук по кафедре минералогии. Однако возникшие препятствия при организации Минералогического института вынудили Федорова уйти из Академии.

В 1905 г. Евграф Степанович стал первым выборным директором Горного института в Петербурге. Здесь он создал первую в нашей стране кафедру кристаллографии и развивал научные исследования в области кристаллографии, минералогии и петрографии. В то время его заслуги получили мировое признание. К нему съезжались специалисты не только со всех концов нашей страны, но и из Англии, Германии, Швейцарии и Японии. Многочисленные иностранные академии и общества избрали его своим членом.

Величайшим торжеством идей Федорова явилось открытие Лауэ в 1912 г. дифракции рентгеновских лучей в кристаллах и первые определения У. Л. и В. Л. Брэггами кристаллических структур на основе рентгеноанализа, показавшие, что все кристаллические структуры подчинены 230 пространственным группам, выведенным ученым еще в 1890 г.

После Великой Октябрьской социалистической революции Евграф Степанович был избран действительным членом обновленной Академии наук.

В конце зимы 1919 г. он заболел воспалением легких, 21 мая 1919 г. его не стало.

После смерти ученого, в 1920 г., вышли в свет его монументальные таблицы по кристаллохимическому анализу — «Царство кристаллов» («Das Kristallreich»).

Научно-литературное наследие Е. С. Федорова поражает своим богатством и исключительной многогранностью. На первом месте по количеству трудов стоит кристаллография, далее следует геометрия, геология и петрография, минералогия, универсальный метод, статьи общего содержания.

Исключительные математические дарования Е. С. Федорова обнаружились чрезвычайно рано. Десятилетним мальчиком он уже с увлечением штудировал учебник геометрии. В 1869 г., в возрасте шестнадцати лет, Федров приступил к работе над своей первой капитальной монографией «Начала учения о фигурах», законченной в 1879 г., а увидевшей свет в 1885 г. В ней содержатся результаты разработки ряда чисто геометрических вопросов, легших впоследствии в основу современной кристаллографии. Здесь дается классификация многогранников и приводится вывод видов симметрии для всех конечных фигур (старинный вывод Гесселя

был заново открыт лишь в 1892 г.). Здесь впервые мы видим вывод знаменитых федоровских параллелоэдров — многогранников, нацело выполняющих пространство при условии их равенства, параллельности в ориентировке и смежности по целым граням. «Традиция приписывает Платону открытие пяти правильных выпуклых многогранников, Архимеду — 13 выпуклых полуправильных многогранников, Кеплеру и Пуансо — четырех правильных невыпуклых многогранников, а Федоров нашел пять параллелоэдров», — пишет по этому поводу известный советский геометр, чл.-корр. АН СССР Б. Н. Делоне [1, с. 5].

Следует заметить, что роль параллелоэдров в природных образованиях (кристаллических структурах, зернистых агрегатах, отдельностях горных пород, трещинах усыхания и проч.) до конца не осознана. Уже в своей первой книге Федоров указал на неполноту вывода правильных систем точек Зонке. Молодому ученому уже в то время была ясна задача вывода 230 пространственных групп, решение которой обессмертило его имя.

В 1890 г. вышел в свет его гениальный мемуар «Симметрия правильных систем фигур». Сам Федоров передает содержание своего труда в следующих словах: «Здесь дается полный вывод правильных систем точек и намечен вывод возможных видов структуры кристаллов. Каждая система строго определяется алгебраическими выражениями. Простые системы, кроме уравнений, точно характеризуются графическим способом» [2, с. XIV]. Симметрия этих бесконечно протяженных систем характеризуется 230 совокупностями элементов симметрии, 230 геометрическими законами, которым подчиняются эти системы. Годом позже, в 1891 г., вышла известная книга немецкого математика А. Шенфлиса «Кристаллические системы и кристаллические структуры», содержащая свой оригинальный вывод тех же 230 пространственных групп. Оба ученых вели между собой ныне опубликованную переписку, из которой видно, что Шенфлис уступал приоритет русскому ученому.

В 1899 г. в Трудах Баварской Академии наук, в связи с избранием Е. С. Федорова членом этой Академии, вышла из печати на немецком языке его монография «Правильное деление плоскости и пространства», где в наиболее полном виде изложены идеи Е. С. Федорова о разбиении пространства, которые легли в основу его представлений о структуре кристаллов.

Значение этих работ для структурной кристаллографии стало ясно лишь после первых экспериментальных расшифровок У. Л. и В. Л. Брэггами реальных кристаллических структур на основе рентгеноанализа.

Е. С. Федоров сразу же отметил подчиненность всех этих структур геометрическим законам симметрии, выведенным за 21 год до этого. В статье «Первое констатирование опытным путем асимморфной правильной системы» он писал: «Не могу воздержаться от заявления, что я никак не думал дожить до действительного определения расположений атомов, предусмотренных в моих сочинениях» [3, с. 56].

Сейчас, как известно, 230 пространственных групп, выведенных Федоровым, лежат в основе рентгеноанализа кристаллов и современной структурной кристаллографии.

Следующая вершина федоровского творчества — это созданный им теодолитный метод. Этот, хорошо известный минералогам и петрографам, метод базируется на двух приборах, изобретенных и сконструированных самим ученым — двукружном (теодолитном) гониометре и федоровском столике для микроскопа. 21 ноября 1889 г. на заседании Петербургского минералогического общества Федоров выступил с заявлением об изобретении им теодолитного гониометра с двумя осями и соответственно двумя либмами, позволяющими характеризовать ориентировку граней кристалла с помощью сферических координат (долготы и полярного расстояния). Впоследствии идея этого прибора была использована В. Гольдшмидтом и Вебским.

В мае 1891 г. Федоров сделал заявку в Геологический комитет на изобретенный им универсальный столик «для более точного изучения оптических свойств кристаллических пластинок под микроскопом». Оба прибора были готовы в конце того же года.

В 1893 г. была опубликована классическая монография ученого «Теодолитный метод в минералогии и петрографии» (на русском и немецком языках).

Плодотворное использование нового метода для детального познания полевых шпатов описано в монографии «Универсальный метод и изучение полевых шпатов» (1896 г.).

С тех пор метод Федорова занял ведущее положение в минералого-петрографической практике всего мира и продолжает совершенствоваться и развиваться до наших дней.

Не менее славится и созданный ученым кристаллохимический анализ, позволяющий по угловым константам и развитию граней кристалла определять его вещество с помощью таблиц «Царство кристаллов».

Ученый не ограничивался в своем анализе задачей определения вещества. По развитию преобладающих граней и частоте их встречаемости он пытался решить задачу о внутренней структуре кристаллов (вернее, о типе их решетки). Сейчас, при наличии рентгеноструктурного анализа, косвенный метод определения структуры по Федорову сохраняет преимущественно исторический интерес. Метод Федорова в дальнейшем развивался и существенно упрощался его учеником А. К. Болдыревым, его английским последователем Т. Баркером и рядом других ученых.

Как уже отмечалось, творчество Федорова не ограничивается кристаллографией, минералогией, петрографией. Ему принадлежит ряд геологических исследований Северного Урала и Кавказа. Ждут дальнейшего развития его работы по новой (проективной) геометрии, помогающие графически интерпретировать кристаллические структуры, сложные химические соединения, горные породы, решать горно-геометрические задачи и пр.

Прошло 125 лет со дня рождения Е. С. Федорова. Наука за это время шагнула далеко вперед. И все же научный вклад, сделанный великим русским ученым, не только сохраняет свою жизненность и актуальность, но и приобретает все большее значение в современной науке. Никогда не потеряют своего значения четыре вершины федоровского творчества: 230 пространственных групп в структурной кристаллографии, теодолитный метод в минералогии и петрографии, кристаллохимический анализ в кристаллохимии, трехмерные параллелоэдры в учении о структуре кристаллов и геометрии.

Идеи Е. С. Федорова, его научные достижения сейчас, в век развития структурной кристаллографии и кристаллохимии, находят все более широкое применение и развитие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Б. Н. Е. С. Федоров как геометр. — Тр. Ин-та истории естествознания и техники, 1956, т. 10, с. 5—12.
2. Федоров Е. С. Курс кристаллографии. СПб., 1897. 375 с.
3. Федоров Е. С. Первое констатирование опытным путем асимморфной правильной системы. — Зап. Горн. ин-та, 1914, т. 5, вып. 1, с. 54—56.

ЛИТЕРАТУРА О ЖИЗНИ И ТВОРЧЕСТВЕ Е. С. ФЕДОРОВА[1]

1. Алявдин В. Ф. Федоровская научная школа. — В кн.: Ленинградский горный институт и Академия наук СССР. Л., 1978, с. 22—29.
2. Алявдин В. Ф. и Шафрановский К. И. Евграф Степанович Федоров (к 20-летию со дня смерти). — Природа, 1939, № 9, с. 111—118.
3. Аншелес О. М. Сущность кристаллохимического анализа Федорова. — Тр. III Менделеевского съезда. Журн. Русск. физ.-хим. об-ва, 1923, т. 54, вып. 8, отд. 2, с. 91—103.
4. Аншелес О. М. 100-летие со дня рождения великого русского ученого Е. С. Федорова. — Вестн. ЛГУ, 1954, № 1, с. 223—226.
5. Аншелес О. М. Творческое наследие Е. С. Федорова. — Уч. зап. ЛГУ, сер. геол. наук, 1954, вып. 4, с. 3—7.
6. Аншелес О. М. Федоров и современная кристаллография. — Тр. Ин-та истории естествозн. и техн., 1956, т. 10, с. 13—18.
7. Аншелес О. М., Шафрановский И. И. Евграф Степанович Федоров. — Уч. зап. ЛГУ, сер. геол.-почв. наук, 1940, вып. 83, с. 1—15.
8. Белов Н. В. Великий русский кристаллограф и его детище. — В кн.: Е. С. Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Сер. Классики науки. М., 1949, с. 580—586.
9. Белов Н. В. Классный метод вывода пространственных групп симметрии. — Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1951, вып. 6, с. 25—62.
10. Белов Н. В. Е. С. Федоров (к 40-летию со дня смерти). Федоровская сессия по кристаллографии. Ленинград, 21—27 мая 1959 г. Тез. докл. Л., 1959, с. 5—8.
11. Белов Н. В. 75 лет учения о пространственных группах симметрии. — Зап. Всесоюзн. минералог. об-ва, 1962а, ч. 91, вып. 1, с. 5—13.
12. Белов Н. В. 14 решеток Браве и 230 пространственных групп симметрии. М.—Л., 1962б.
13. Белов Н. В., Шафрановский И. И. Роль Е. С. Федорова в предистории рентгеноструктурной кристаллографии (к 50-летию открытия дифракции рентгеновских лучей в кристаллах). — Зап. ВМО, 1962в, ч. 91, вып. 4, с. 465—471.
14. Богомолов С. А. Вывод правильных систем по методу Федорова. Ч. I, Л., 1932, 100 с.; ч. II, Л., 1934, 191 с.
15. Бокий Г. Б. Академик Е. С. Федоров — основоположник современной кристаллографии. М., 1952. 22 с.
16. Бокий Г. Б. Е. С. Федоров и кристаллохимия. — Тр. Ин-та истории естествозн. и техн., 1956а, т. 10, с. 19—27.
17. Бокий Г. Б. О законе расположения атомов в кристаллах. — В кн.: Кристаллография, вып. 5. Л., 1956б, с. 25—36.
18. Бокий Г. Б., Шафрановский И. И. Русские кристаллографы. — Тр. Ин-та истории естествозн. и техн., 1947, т. 1, с. 87—120.

[1] Наиболее полную библиографию трудов Е. С. Федорова см. в кн.: Сорокин А. М. Библиография печатных работ Е. С. Федорова — В кн.: Рукописные материалы Е. С. Федорова в Архиве АН СССР. Тр. Архива АН СССР, 1957, вып. 14, с. 161—204.

19. Бокий Г. Б., Шафрановский И. И. История вывода 230 пространственных групп. — В кн.: Е. С. Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Сер. «Классики науки». М.—Л., 1949, с. 687—698.
20. Бокий Г. Б., Шафрановский И. И. Материалы по истории русской кристаллографии (из архива Е. С. Федорова). — В кн.: Научное наследство, т. II. М., 1950, с. 295—354.
21. Болдырев А. К. Е. С. Федоров (некролог). — Геол. вестн., 1921а, т. IV (1918—1921), с. 203—204.
22. Болдырев А. К. Схема научных работ Е. С. Федорова. Существенные черты его работ по геометрии и геометрической кристаллографии. — Изв. Географ. ин-та, 1921б, вып. 2, с. 123—133.
23. Болдырев А. К. Комментарии к работе Е. С. Федорова «Das Krystallreich». Л., 1926, с. 4—72.
24. Болдырев А. К. Евграф Степанович Федоров. — Газ. «За индустриализацию», 1937, № 176, 4 VIII.
25. Бух Н. К. Воспоминания. Л., 1928, с. 145, 151, 152, 155, 156.
26. Бух Н. К. Подпольный революционер — великий ученый. — В кн.: Каторга и ссылка, 1931, 8 (71), с. 194, 195.
27. Вернадский В. И. Задачи минералогии в нашей стране (1917—1927). — Природа, 1928, № 1, с. 22—39.
28. Вертушков Г. Н. Выдающийся кристаллограф Е. С. Федоров. — Тр. Горно-геол. ин-та, вып. 26, Минералог. сб. № 3 (посвящен памяти академика Е. С. Федорова). Свердловск, 1955, с. 12—17.
29. Григорьев Д. П. Заседание Всероссийского минералогического общества, посвященное памяти Е. С. Федорова 21 мая 1939 г. (к 20-летию со дня смерти). — Зап. ВМО, 1939, ч. 68, вып. 2, с. 504, 505.
30. Григорьев Д. П., Шафрановский И. И. Выдающиеся русские минералоги. М.—Л., 1949, с. 136—161.
31. Делоне Б. Н. Е. С. Федоров как геометр. — Тр. Ин-та истории естествозн. и техн., 1956, т. 10, с. 5—12.
32. Елисеев Н. А. К пятидесятилетию универсального метода Е. С. Федорова. — Тр. Ин-та истории естествозн. и техн., 1956, т. 10, с. 66—84.
33. Заварицкий А. Н. Введение в петрохимию. М., 1944. 321 с.
34. Заварицкий А. Н. Одна из важных задач минералогии (об изображении атомных структур минералов). — Зап. ВМО, 1949а, т. 78, вып. 3, с. 141—155.
35. Заварицкий А. Н. Об изображении атомных структур минералов. — Изв. АН СССР, 1949б, № 6, с. 141—165.
36. Заварицкий А. Н. Развитие универсального метода Федорова и применение его к изучению полевых шпатов. — В кн.: Универсальный столик Е. С. Федорова. М., 1953а, с. 5—15.
37. Заварицкий А. Н. Дальнейший шаг в применении универсального столика (к 50-летию федоровского метода). — В кн.: Универсальный столик Е. С. Федорова. М., 1953б, с. 763—778.
38. Заварицкий А. Н. О возможном усовершенствовании универсального столика Федорова. — В кн.: Универсальный столик Е. С. Федорова. М., 1953в, с. 831, 832.
39. Кованько Г. Н. Из истории структурной кристаллографии. — Зап. ВМО, 1958, т. 87, вып. 6, с. 675, 676.
40. Кованько Г. Н. Е. С. Федоров о преподавании минералогии в средних технических школах. — Изв. вузов, геол. и разв., 1959, № 2, с. 146—151.
41. Кованько Г. Н. Е. С. Федоров и периодический закон химических элементов. — В кн.: Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии и минералогии. Л., 1970, с. 24—32.
42. Кристаллография, вып. 3. Сб. ст., посв. 100-летию со дня рождения академика Е. С. Федорова. Л., 1955. 256 с.
43. Кузнецов Е. А. К истории русской петрографии. Федоровский метод, его

возникновение в России и развитие на родине и за границей. — Уч. зап. МГУ, 1946, вып. 104, с. 98—103.

44. Кумок Я. Н. Евграф Федоров. Сер. «Жизнь замечательных людей». М., 1971. 320 с.

45. Левинсон-Лессинг Ф. Ю. Несколько юбилейных дат в петрографии (в том числе «Сорокапятилетие так называемого универсального, или федоровского, метода в петрографии»). — Природа, 1938, № 6, с. 137—144.

46. Лодочников В. Н. Несколько замечаний по поводу применения микроскопического метода Е. С. Федорова. — В кн.: Универсальный столик Е. С. Федорова. М., 1953, с. 743—751.

47. Михеев В. И., Шафрановский И. И. Достоверность определения типа структуры по методу Е. С. Федорова. — В кн.: Кристаллография (Тр. Федоровск. научной сессии 1949 г.). М., 1951, с. 5—14.

48. Михеев В. И., Шафрановский И. И. Кристаллографические законы, открытые и сформулированные Е. С. Федоровым. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955, с. 97—112.

49. Наливкин Д. В. Из студенческих воспоминаний о Е. С. Федорове. — В кн.: Кристаллография и минералогия (Тр. Федоровской сессии 1969 г.). Л., 1972, с. 3—8.

50. Никитин В. В. Универсальный метод Федорова. Т. I, II, III. Пг., 1911—1915. 499 с.

51. Никитин В. В. Евграф Степанович Федоров. — Изв. Геол. ком., 1919, т. 38, № 4—7, с. 429—467.

52. Никитин В. В. Евграф Степанович Федоров. — Изв. Географ. ин-та, 1921, вып. 2, с. 113—122.

53. Никитин В. В. Новые диаграммы для определения полевых шпатов универсальным методом Федорова. — В кн.: Универсальный столик Е. С. Федорова. М., 1953, с. 567—651.

54. Николаев В. А. Некоторые дополнения к теории и практике универсального метода. — В кн.: Универсальный столик Е. С. Федорова. М., 1953, с. 553—566.

55. Определитель кристаллов. Т. I. Л., 1937, с. 438; 1939, с. 857.

56. Орелкин Б. П., Пигулевский Г. В. Применение кристаллохимического метода Е. С. Федорова в научной и практической работе. — В кн.: Новые идеи в химии, сб. 5. Пг., 1914, с. 151—160.

57. Подногин А. К. Микроскопическое исследование породообразующих минералов по методу Федорова. М., 1935. 108 с.

58. Раскин Н. М., Шафрановский И. И. Рукописное наследие Е. С. Федорова. — Вестн. АН СССР, 1956, № 1, с. 71—77.

59. Раскин Н. М., Шафрановский И. И. Е. С. Федоров и В. И. Вернадский по материалам архива Академии наук СССР. — В кн.: Очерки по истории геологических знаний, № 8. М., 1959, с. 165—176.

60. Романов Б. М. Роль Е. С. Федорова в истории геологического исследования Урала (к 100-летию со дня рождения Е. С. Федорова). — Тр. Горно-геолог. ин-та, вып. 26. Минерал. сб., № 3. Свердловск, 1955, с. 5—11.

61. Саранчина Г. М. Федоровский метод. Л., 1954. 132 с.

62. Седых Т. Б. Е. С. Федоров — борец за материализм. — Вопросы философии, 1954, № 3, с. 151—158.

63. Смирнов В. И. Деятельность Е. С. Федорова в области геологии рудных месторождений. — В кн.: Очерки по истории геологических знаний, вып. 5. М., 1956, с. 239—247.

64. Соболев В. С. Федоровский метод. М., 1954. 264 с.

65. Соболев В. С. О роли Е. С. Федорова в развитии современной петрографии. — Зап. ВМО, 1957, ч. 84, вып. 2, с. 209—217.

66. Соколов Н. М. О мировоззрении Е. С. Федорова. — В кн.: Кристаллография, вып. 5. Л., 1956, с. 5—23.

67. Соловьев С. П. Роль акад. Е. С. Федорова в развитии петрографии. — Зап. ВМО, 1949, т. 73, вып. 4, с. 237—240.
68. Соловьев С. П. Петрографическое наследство Е. С. Федорова. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955, с. 147—156.
69. Стратонович Е. Определение плагиоклазов по новому методу Федорова. — Зап. ВМО, 1899, т. 37, 158 с.
70. Стулов Н. Н., Шафрановский И. И. Новые материалы к творческой биографии Е. С. Федорова. — Зап. ВМО, 1959, ч. 88, вып. 5, с. 572—582.
71. Татаринов П. М., Соловьев С. П., Шафрановский И. И. Основные вехи жизни и творчества Е. С. Федорова. — В кн.: Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии и минералогии. Л., 1970, с. 3—7.
72. Татарский В. Б. О работах Е. С. Федорова по росту кристаллов. — В кн.: Рост кристаллов, т. IX. М., 1972, с. 7—12.
73. Труды Горно-геологического института, вып. 26. Минералогический сб., № 3 (посвящается памяти академика Е. С. Федорова). Свердловск, 1955. 248 с.
74. Труды Института истории естествознания и техники, т. 10. Материалы юбилейной сессии, посвященной столетию со дня рождения Е. С. Федорова. М., 1956, с. 1—84.
75. Универсальный столик Е. С. Федорова (сб. под ред. А. Н. Заварицкого и др.). М., 1953. 838 с.
76. Усов М. А. Федоровский или универсально-оптический метод исследования породообразующих минералов. Томск, 1910. XVI+ 142 с.
77. Ученые записки ЛГУ, сер. геолого-почв. наук, вып. 3 (посвящается 20-летию со дня смерти Е. С. Федорова). Л., 1940. 33 с.
78. Ученые записки ЛГУ, № 178, сер. геол. наук, вып. 4. Кристаллография и кристаллохимия (посвящается 100-летию со дня рождения Е. С. Федорова). Л., 1954. 264 с.
79. Федоров Е. С. — Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона, 1902, полутом 64, с. 413.
80. Федоров Е. С. Материалы для биографического словаря действительных членов Академии наук, ч. II. Пг., 1915, с. 205—215.
81. Ферсман А. Е. Памяти Евграфа Степановича Федорова. — Природа, 1919, № 4/6, с. 235—244.
82. Ферсман А. Е. Е. С. Федоров и его роль в науке. — Наука и ее работники, 1920, № 1, с. 13—15.
83. Франк-Каменецкий В. А. «Начала учения о фигурах» Е. С. Федорова и их значение для кристаллографии. — В кн.: Е. С. Федоров. Начала учения о фигурах. Сер. «Классики науки». М.—Л., 1953, с. 371—390.
84. Франк-Каменецкий В. А. Монография Е. С. Федорова о фигурах и ее значение для кристаллографии. — Уч. зап. ЛГУ, сер. геол. наук, 1954, вып. 4, № 178, с. 8—22.
85. Франк-Каменецкий В. А. К истории создания теодолитного гониометра. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955а, с. 139—146.
86. Франк-Каменецкий В. А., Шафрановский И. И. Начало творческого пути Е. С. Федорова. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955б, с. 113—124.
87. Хвасс Э. А. Работы Е. С. Федорова в области геометрии и применение их в горно-металлургической промышленности. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955, с. 157—168.
88. Черняк А. Я. Новые документы о великом кристаллографе. Академик Е. С. Федоров и «Энциклопедический словарь Граната». — Природа, 1964, № 7, с. 103, 104.
89. Шафрановский И. И. Евграф Степанович Федоров. — Вестн. знаний, 1939, № 12, с. 62—65.
90. Шафрановский И. И. Е. С. Федоров — великий русский кристаллограф. М., 1945. 92 с.
91. Шафрановский И. И. Гениальный русский кристаллограф, петрограф,

минералог и геометр академик Е. С. Федоров. — В кн.: Выдающиеся ученые Горного института. Л., 1948а, с. 33—46.
92. Шафрановский И. И. Евграф Степанович Федоров. — В кн.: Люди русской науки, т. I. М.—Л., 1948б, с. 427—444.
93. Шафрановский И. И. Евграф Степанович Федоров. Жизнь и творчество.— В кн.: Евграф Степанович Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Сер. «Классики науки». М.—Л., 1949а, с. 557—579.
94. Шафрановский И. И. Евграф Степанович Федоров — великий русский кристаллограф, минералог, петрограф и геометр. — Природа, 1949б, № 4, с. 61—65.
95. Шафрановскпй И. И. Е. С. Федоров. М.—Л., 1951. 282с.
96. Шафрановский И. И. Евграф Степанович Федоров (к 100-летию со дня рождения). — Зап. ВМО, 1953, ч. 82, вып. 4, с. 241—246.
97. Шафрановский И. И. Курсы кристаллографии Е. С. Федорова. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955а, с. 125—137.
98. Шафрановский И. И. Основатель современной кристаллографии. — Природа, 1955б, № 6, с. 73—79.
99. Шафрановский И. И. Е. С. Федоров и Академии наук. — Тр. Ин-та истории естествозн. и техн., 1956, т. 10, с. 28—65.
100. Шафрановский И. И. Федоров Евграф Степанович. — БСЭ, т. 44, с. 574.
101. Шафрановский И. И. Возможность использования кристаллохимического анализа для решения минерагенетических задач. — Зап. ВМО, 1960, ч. 89, вып. 1.
102. Шафрановский И. И. История кристаллографии в России. М.—Л., 1962а. 416 с..
103. Шафрановский И. И. Е. С. Федоров. — В кн.: Люди русской науки, геология и география. М., 1962б, с. 63—82.
104. Шафрановский И. И. Евграф Стапанович Федоров. М.—Л., 1963. 284 с.
105. Шафрановский И. И. Кристаллографические законы Е. С. Федорова и статистическое распределение минералов по сингониям. — В кн.: Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии и минералогии. Л., 1970, с. 235—238.
106. Шафрановский И. И. Развитие идей Е. С. Федорова в современной науке. — В кн.: Кристаллография и минералогия (Труды Федоровской сессии 1969 г.). Л., 1972а, с. 3—8.
107. Шафрановский И. И. От Н. Стенона до Е. С. Федорова. Юбилейные даты в истории открытия и изучения изоморфизма. — В кн.: Кристаллография и минералогия (Труды Федоровской сессии 1969 г.). Л., 1972б, с. 10—16.
108. Шафрановский И. И., Бокий Г. Б. Несколько забытых статей Е. С. Федорова. — Зап. ВМО, 1952а, ч. 81, вып. 3, с. 193—198.
109. Шафрановский И. И., Бокий Г. Б. Из истории русской кристаллографии. Научная публицистика Е. С. Федорова. — Вестн. МГУ, 1952б, № 10, с. 129—147.
110. Шафрановский И. И., Раскин Н. М. Рукописные материалы Е. С. Федорова в Архиве Академии наук СССР. Вступительная статья, научное описание, тексты — Тр. Архива АН СССР, 1957, вып. 14, 212 с.
111. Шафрановский И. И., Соркин А. М. К вопросу о полной библиографии трудов Е. С. Федорова. — Зап. ВМО, 1956, ч. 85, № 2, с. 247—250.
112. Шафрановский И. И., Франк-Каменецкий В. А. Е. С. Федоров и Брегг У. Л. — Зап. ВМО, 1970, ч. 99, вып. 4, с. 479—481.
113. Штейнберг Д. С. Е. С. Федоров и Урал. — В кн.: Минералогия и минералогическая кристаллография. Свердловск, 1971, с. 5—10.
114. Шубников А. В. Евграф Степанович Федоров. — Наука и жизнь, 1944, № 6, с. 41, 42.
115. Шубников А. В. Об основном законе кристаллографии Е. С. Федорова

(материал к истории и психологии одной ошибки). — Тр. Ин-та кристаллографии АН СССР, 1955, вып. 11, с. 18—32.
116. Шубников А. В. Евграф Степанович Федоров (к 50-летию со дня смерти). — Кристаллография, 1968, т. 14, вып. 3, с. 387—392.
117. Шубников А. В. Воспоминания о Евграфе Степановиче Федорове. — В кн.: Идеи Е. С. Федорова в современной кристаллографии и минералогии). Л., 1970, с. 8—10.
118. Шустерова М. С. Обзор документальных материалов Центрального государственного исторического архива СССР в Ленинграде о Е. С. Федорове. — В кн.: Кристаллография, вып. 3. Л., 1955, с. 253—255.
119. Щербаков Д. И. Советская минералогия на службе народного хозяйства (к 10-летию со дня смерти А. Е. Ферсмана). — Природа, 1955, № 5, с. 27—36.
120. Щукарев С. А. Е. С. Федоров о периодической системе элементов (в свете современных представлений о строении атома) — В кн.: Ленинградский горный институт и Академия наук СССР. Л., 1978, с. 30—34.
121. Щукарев С. А., Добротин Р. Б. О новой рукописи Е. С. Федорова по периодическому закону. — В кн.: Кристаллография, вып. 3, Л., 1955, с. 81—84.
122. Backlund H. E. S. Fedorov. — Geol. For. Förh. Stocholm, 1920, vol. 42, p. 214—219.
123. Burckhardt J. J. Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen. — Archive History Exact Sci., 1967, vol. 4, No. 3. Springer—Verlag. Berlin—Heidlberg—New York, p. 235—246.
124. Burckhardt J. J. Über die Entdeckung der Paralleloeder. — Janus. Revue Internationale de l'histoire des sciences, de la medecine, de la pharmacie et de la technique, vol. LYI, No. 4. Brill. Leiden, p. 241—243.
125. Burckhardt J. J. Der Briefwechsel von E. S. Fedorov und A. Schoenfleis. 1889—1908. — Archive History Exact Sci., 1971, vol. 7, No. 2, Springer—Verlag, p. 91—141.
126. Burckhardt J. J. Der Briefwechsel von E. S. Fedorov und F. Klein, 1893. Archive History Exact Sci., 1972, Springer—Verlag, p. 85—93.
127. Kurylenko C. La vie et l'oevre du cristallographe russe Fedorov. —Bull. Soc. franc. miner., crist. 1944, p. 281—286.
128. Nowacki W. Cinquante ans de theorie generale de la structure des cristaux. — Ann. Guebhard—Severine, Zurich, 1936, vol. 12, p. 120; 1937, vol. 13, p. 187.
129. Nowacki W. Space groups not always derivable by parallelohedra and subdivision into stereohedra. — Sci., 1971, No. 174, p. 52—53.
130. Nowacki W. Bemerkungen zur Geschichte der Raumgruppen—Symbole von Fedorov, Schoenflies und Hermann—Mauguin. — Z. Kristallogr., 1972, No. 135, p. 145—158.
131. Shafranovskij I. I., Belov N. V. E. S. Fedorov. 1853—1919. Fifty years of X-ray diffraction. Utrecht, 1962, p. 341—351.
132. Spencer L. J. Biographical notices of Mineralogists recently feceased. Fedorov (Evgraph Stepanovich). — Mineral. Magaz., 1921, vol. XIX, No. 94, p. 244, 245.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие 5
Е. С. Федоров. Правильное деление плоскости и пространства 7
Часть I. Правильное деление плоскости 8
Часть II. Правильное деление пространства 37
Приложение (таблицы I—XIII) 186

ПРИЛОЖЕНИЯ

Примечания составителей 215
И. И. Шафрановский, В. А. Франк-Каменецкий. Учение о параллелоэдрах и теория правильных систем фигур в творчестве Е. С. Федорова 218
Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулин, М. И. Штогрин. Современная теория правильных разбиений евклидова пространства 235
В. А. Франк-Каменецкий, И. И. Шафрановский. Е. С. Федоров и его научное наследие 261
Литература о жизни и творчестве Е. С. Федорова 266

Е. С. Федоров

«ПРАВИЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА»

Утверждено к печати Редколлегией серии «Классики науки» Академии наук СССР

Редактор издательства ***Е. А. Семенова.*** Художник ***Д. С. Данилов***
Технический редактор ***Н. А. Кругликова***
Корректоры ***Ж. Д. Андронова, Л. А. Привалова*** и ***С. И. Семиглазова***

ИБ № 8296

Сдано в набор 08.08.78. Подписано к печати 22.02.79. М-05625. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Печ. л. 17+1 вкл. ($^1/_8$ печ. л.)=20.03 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 21.47. Тираж 1400. Изд. № 6974. Тип. зак. № 658. *Цена 2 р. 80 к.*

Изд-во «Наука», Ленинградское отделение. 199164, Ленинград, В-164, Менделеевская лин., 1

Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12



Е. С. Федоровъ


ДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА
Е.С.ФЕДОРОВ